

УДК 517.53/.57

МАРКОВСКИЕ РАЗБИЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ

Л. А. Бунимович, Я. Г. Синай, Н. И. Чернов

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Основные определения и формулировки результатов	97
§ 2. Общие свойства двумерных рассеивающих бильярдов	102
§ 3. Построение предмарковского разбиения	106
§ 4. Случай бесконечного горизонта	111
§ 5. Переход от предмарковского разбиения к марковскому	116
§ 6. Нерассеивающие бильярды с гиперболическим поведением	123
§ 7. Оценки числа периодических точек	127
§ 8. Области с гладкой границей	130
С п и с о к л и т е р а т у р ы	133

§ 1. Основные определения и формулировки результатов

1.1. Пусть Q — ограниченная связная замкнутая область на плоскости \mathbb{R}^2 или на двумерном торе Tор^2 с евклидовой метрикой. Мы предполагаем, что граница ∂Q состоит из конечного числа гладких (класса C^3) несамопересекающихся кривых Γ_i , $1 \leq i \leq d$, которые либо замкнуты, либо имеют общие концевые точки.

Бильярдная динамическая система (или просто *бильярд*) в Q порождается движением по инерции материальной точки внутри области Q . Точка движется прямолинейно с единичной скоростью внутри Q . При достижении границы ∂Q точка отражается от нее по закону «угол падения равен углу отражения».

Бильярды служат модельными системами во многих задачах физики (см. обзор [6]). В частности, к рассматриваемому классу бильярдных систем относится такая популярная модель статистической механики, как газ Лоренца [6, 12, 19].

Эргодические свойства бильярдных систем определяются структурой границы ∂Q , точнее — ее геометрической кривизной в регулярных точках. Оснастим каждую компоненту Γ_i единичными векторами нормали $n(q)$, $q \in \Gamma_i$, направленными внутрь области Q . Тогда кривизна $\kappa(q)$ кривой Γ_i в каждой точке $q \in \Gamma_i$ приобретает определенный знак. Мы предполагаем, что она знакопостоянна на каждой кривой Γ_i , включая ее концы. Соответственно, назовем компоненту Γ_i *рассеивающей*, если $\kappa(q) > 0$ при всех $q \in \Gamma_i$ (в этом случае Γ_i выпукла внутрь области Q), *фокусирующей*, если $\kappa(q) < 0$ при всех $q \in \Gamma_i$ (т. е. Γ_i выпукла наружу) и *нейтральной*, если $\kappa(q) \equiv 0$ на Γ_i (в этом случае Γ_i — отрезок прямой).

О п р е д е л е н и е. Биллиард в области Q называется *рассеивающим*, если все компоненты границы ∂Q рассеивающие (рис. 1).

Стохастические свойства двумерных рассеивающих биллиардов изучены достаточно полно. Они эргодичны, являются K -системами [10] и в ряде случаев для них доказано B -свойство [21].

Всюду в работе (кроме § 6) рассматриваются только рассеивающие биллиарды. Такие биллиарды обладают наиболее сильно выраженным гиперболическим поведением (подробнее см. § 2). Некоторые классы биллиардов

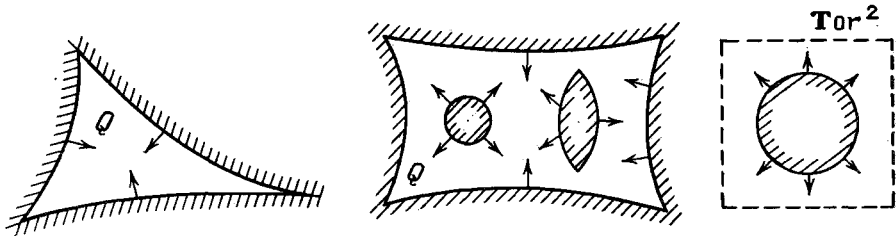


Рис. 1

с фокусирующими и нейтральными компонентами границы также являются гиперболическими. Один такой класс рассматривается в § 6.

Фазовым пространством биллиардной системы в области Q является единичный касательный пучок M над Q , т. е. $M = \{x = (q, v) : q \in Q, \|v\| = 1\}$, или $M = Q \times S^1$. Обозначим π естественную проекцию M на Q : $\pi x = q$. Легко видеть, что M — трехмерное многообразие с краем $\partial M = \bigcup_i \pi^{-1}\Gamma_i = \bigcup_i M^{(i)}$. Обозначим

$$S_0 = \{x = (q, v) : q \in \partial Q, (v, n(q)) = 0\},$$

$$V_0 = \bigcup_{i \neq j} \pi^{-1}(\Gamma_i \cap \Gamma_j), \quad R_0 = S_0 \cup V_0.$$

Однопараметрическая группа сдвигов вдоль траекторий биллиардной системы обозначается $\{S^t\}$, $-\infty < t < \infty$. Рассматриваемые системы являются разрывными. В частности, поток $\{S^t\}$ определен только на подмножестве $M' = \{x : S^t x \notin V_0 \text{ при всех } t\}$. Будем считать, что траектории точек $x \in M \setminus M'$ определены только до попадания в множество V_0 .

Мера Лиувилля на M имеет вид $d\mu = \text{const } dq dv$, где dq и dv — меры Лебега на Q и S^1 соответственно, const — нормирующий множитель. Хорошо известно, что $\{S^t\}$ сохраняет меру μ и $\mu(M') = 1$ (см., например, [7]).

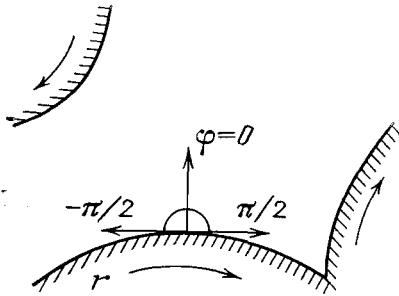


Рис. 2

Эргодические свойства потоков часто исследуются при помощи их специальных представлений, иначе — отображений последования некоторой секущей поверхности [14]. В случае биллиардов удобно строить секущую поверхность, используя естественную границу ∂M фазового пространства. Обозначим $M_1 = \{x = (q, v) : q \in \partial Q, (v, n(q)) \geq 0\}$. Очевидно, M_1 — двумерное многообразие с краем $\partial M_1 = R_0$. Положим $M_1^{(i)} = M_1 \cap M^{(i)}$, $1 \leq i \leq d$.

На каждом $M_1^{(i)}$ введем естественные координаты (r, φ) , где r — параметр длины на кривой Γ_i и φ — угол между векторами v и $n(q)$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Координата r отсчитывается от некоторой точки $q_0 \in \Gamma_i$ и возрастает при обходе границы ∂Q , когда область Q остается слева (рис. 2). В этих координатах $M_1^{(i)}$ есть либо прямоугольник (если Γ_i не замкнута), либо цилиндр (если Γ_i замкнута).

Для фазовой точки $x \in M$ обозначим $\tau^+(x)$ и $\tau^-(x)$ первый положительный и отрицательный моменты времени достижения границы ∂M : $\tau^+(x) = \min \{ \tau > 0: S^\tau x \in \partial M \}$, $\tau^-(x) = \max \{ \tau < 0: S^\tau x \in \partial M \}$. Можно показать [10], что $|\tau^\pm(x)| < \infty$ почти всюду на M и всюду на M_1 . Отображение последования $T: M_1 \rightarrow M_1$ определяется формулой $Tx = S^{\tau^+(x)+0}x$, $x \in M_1$. Известно [7], что T сохраняет меру $dv = \text{const} \cos \varphi dr d\varphi$ (как и ранее, const — нормирующий множитель).

Обозначим $M'_1 = M_1 \cap M'$. Отображение T взаимно-однозначно на M'_1 . Для оставшихся точек $x \in M_1 \setminus M'_1$ их образы $T^n x$ определены не для всех $n \in \mathbb{Z}$, а только до попадания в множество V_0 . На языке эргодической теории $\{S^t\}$ называется *специальным потоком*, построенным с помощью автоморфизма T , базового пространства M_1 и функции $\tau^+(x)$ (см. [7]).

Отображения T и T^{-1} являются кусочно-гладкими на M_1 . Множество особых точек для T (T^{-1}) совпадает с $R_0 \cup T^{-1}R_0$ (соответственно, с $R_0 \cup \cup TR_0$). Обозначим $S_k = T^k S_0$, $V_k = T^k V_0$, $R_k = T^k R_0$ при $-\infty < k < \infty$, а также $R_{k,m} = \bigcup_k^m R_i$ при $-\infty \leq k < m \leq \infty$ (здесь и далее $TV_0 = \{Tx: x = (q, v), q \in \Gamma_i \cap \Gamma_j \text{ при } i \neq j \text{ и } v \text{ направлен внутрь } Q\}$; аналогично определяется $T^{-1}V_0$). Тогда множество особых точек для $T^{\pm n}$, $n \geq 1$, совпадает с $R_{-n,0}$ ($R_{0,n}$). Нетрудно увидеть, что множество $R_{-\infty,\infty}$ состоит из счетного числа гладких (C^1) кривых, называемых далее просто *кривыми разрыва*. Наконец, *кратностью* точки $x \in M_1$ назовем число (возможно, бесконечное) кривых разрыва, проходящих через нее или оканчивающихся в ней.

Основным инструментом исследования эргодических свойств гиперболических систем являются *локальные устойчивые и неустойчивые многообразия* (сокращенно, ЛУМ и ЛНМ). В нашем случае ЛУМ определяется как гладкая (C^1) кривая $\gamma^s \subset M_1$ (рассматриваемая без концевых точек) такая, что T^n непрерывно на γ^s при всех $n \geq 1$ и длина образа $T^n \gamma^s$ стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. ЛНМ γ^u определяется так же, но с заменой T^n на T^{-n} .

Для двумерных рассеивающих бильярдов доказано [10], что ν -почти каждая точка $x \in M_1$ обладает ЛУМ и ЛНМ, проходящими через x . Будем обозначать через $\gamma^u(x)$ ($\gamma^s(x)$) максимальный гладкий отрезок ЛНМ (ЛУМ), проходящий через точку x . *Глобальными устойчивыми и неустойчивыми многообразиями* (сокращенно ГУМ и ГНМ) называются, соответственно, множества $\Gamma^s(x) = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n} \gamma^s(T^n x)$ и $\Gamma^u(x) = \bigcup_{n \geq 0} T^n \gamma^u(T^{-n} x)$ (см. [14]). Для

$x, y \in M_1$ обозначим $[x, y] = \gamma^u(x) \cap \gamma^s(y)$. В § 2 будет показано, что множество $[x, y]$ состоит не более чем из одной точки. Если $A \subset \gamma^s(x)$, $B \subset \gamma^u(y)$ и точка $[x', y']$ определена для всех $x' \in A$, $y' \in B$, то положим $[A, B] = \{[x', y']: x' \in A, y' \in B\}$.

1.2. Марковские разбиения. Выделим в M_1 специальные подмножества, называемые параллелограммами:

О п р е д е л е н и е. Подмножество $U \subset M_1$ называется *параллелограммом*, если для любой пары точек $x, y \in U$ точка $[x, y]$ определена и принадлежит U .

В определении параллелограмма обычно накладывалось требование $\nu(U) > 0$. Мы откажемся от него и будем называть параллелограммы положительной меры *невыврожденными*, а нулевой меры — *вырожденными*.

Термин «параллелограмм» для элементов марковского разбиения введен в работе [16] (где было построено марковское разбиение для автоморфизма двумерного тора с элементами в виде «настоящих» параллелограммов). В [3] для этих целей использовался термин «прямоугольник» (см. также [8]).

Для подмножества $A \subset M_1$ обозначим $\gamma^u_A(x) = \gamma^u(x) \cap A$ и $\gamma^s_A(x) = \gamma^s(x) \cap A$. Подмножества $A_1 \subset \gamma^u(x_1)$ и $A_2 \subset \gamma^u(x_2)$ называются *канонически изоморфными* [18], если для любой точки $y \in A_1$ ЛУМ $\gamma^s(y)$ пе-

ресекает A_2 и наоборот. Аналогичное определение вводится для подмножеств ЛУМ. В параллелограмме U множества $\gamma_U^u(x)$ для всех $x \in U$ канонически изоморфны. Это же справедливо и для множеств $\gamma_U^s(x)$, $x \in U$. Поэтому любой параллелограмм U можно представить в виде $U = [\gamma_U^s(x), \gamma_U^u(y)]$, где x, y — произвольные точки U . Иначе говоря, параллелограмм U имеет структуру прямого произведения.

В определении параллелограмма не предполагается, что $\gamma_U^u(x), \gamma_U^s(x)$ связны, открыты или замкнуты. В некоторых гладких системах их можно выбрать связными [14] и тогда U будет криволинейным четырехугольником. Однако, в разрывных системах (в том числе в бильярдах) ЛНМ и ЛУМ могут быть сколь угодно короткими в окрестности любой точки фазового пространства. Поэтому параллелограммы U и множества $\gamma_U^u(x), \gamma_U^s(x)$ при $x \in U$ устроены довольно сложно. В нашем случае они являются вполне несвязными множествами канторовского типа (см. § 5).

Назовем пересечение упорядоченной пары параллелограммов U_1 и U_2 *правильным*, если оно не пусто и $U_1 \cap U_2 = [\gamma_{U_2}^s(x), \gamma_{U_1}^u(x)]$ для любой точки $x \in U_1 \cap U_2$. Соответствующие пересечения схематически изображены на рис. 3.

Пусть η — конечное или счетное покрытие (mod 0) пространства M_1 замкнутыми параллелограммами $\{U_i\}$ такое, что $\nu(U_i \cap U_j) = 0$ при $i \neq j$ и

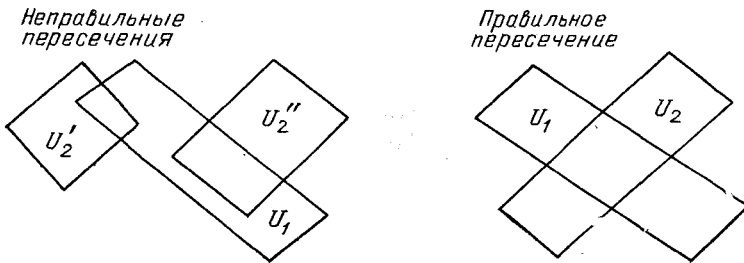


Рис. 3

$\nu(M_1 \setminus \bigcup_i U_i) = 0$ (т. е. ν — почти каждая точка $x \in M_1$ покрыта ровно одним параллелограммом). Для тех $x \in M_1$, которые покрываются ровно одним элементом $U_i \in \eta$, будем обозначать этот элемент $U(x)$.

О п р е д е л е н и е. *Марковским разбиением* называется покрытие η такое, что: а) каждый параллелограмм $U \in \eta$ лежит в некоторой связной области $V(U) \subset M_1$, на которой отображения T и T^{-1} непрерывны и б) для ν -почти каждой точки $x \in M_1$ параллелограммы $U(x)$ и $TU(T^{-1}x)$ пересекаются правильным образом.

Впервые марковские разбиения для U -систем Аносова (в несколько иной форме) были введены в [8]. Позже они были построены для более общих A -систем Смейла [2, 3]. Исчерпывающее изложение соответствующей теории приведено в книгах [3, 14]. Во всех этих случаях разбиение η конечно, а его элементы устроены сравнительно просто.

Важность марковских разбиений заключается в том, что они позволяют построить удобное символическое представление для автоморфизма T .

Напомним, как в общем случае строится символическое представление автоморфизма T пространства с мерой (M, ν) по произвольному конечному или счетному измеримому разбиению $\eta = \{U_i\}$, $1 \leq i \leq N$ ($N \leq \infty$). Для любой точки $x \in M$ определим двустороннюю последовательность индексов $\sigma = \sigma(x) = \{\dots, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots\}$, где $T^n x \in U_{\sigma_n}$, $-\infty < n < \infty$. Последовательность $\sigma(x)$ будем называть *кодировкой* точки x . Обозначим Σ пространство двусторонних последовательностей $\sigma = \{\sigma_n\}$, $1 \leq \sigma_n \leq N$, и

θ —сдвиг влево на Σ , т. е. $\theta\sigma = \sigma'$, где $\sigma'_n = \sigma_{n+1}$. Рассмотрим отображение $\Phi: M \rightarrow \Sigma$, переводящее x в $\sigma(x)$ и $\Sigma_\Phi = \Phi(M) \subset \Sigma$. Легко проверить, что $\Phi \circ T = \theta \circ \Phi$, т. е. Φ является сопряжением автоморфизма T и сдвига θ . Инвариантная мера ν в M индуцирует меру ν_Σ в Σ по формуле $\nu_\Sigma(A) = \nu(\Phi^{-1}A)$, $A \subset \Sigma$. Тем самым пространство с мерой (Σ, ν_Σ) становится пространством реализаций стационарного случайного процесса с конечным или счетным числом состояний. Поэтому задачи об исследовании стохастических свойств динамических систем становятся задачами теории вероятностей или одномерной статистической механики решетчатых систем.

Марковские разбиения выделены среди прочих разбиений тем, что получаемая с их помощью символическая динамика (Σ_Φ, θ) допускает сравнительно простое описание — она является (mod 0) топологической марковской цепью [2]. А именно, введем матрицу пересечений $\Pi = \|\pi_{ij}\|$ по формуле

$$\pi_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } U_j \cap TU_i \text{ — правильное пересечение,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пространство Σ_Π последовательностей $\{\sigma_n\}$, удовлетворяющих условию $\pi_{\sigma_n\sigma_{n+1}} \equiv 1$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, на котором определен левый сдвиг θ , является топологической марковской цепью (ТМЦ). Легко показать [3], что для любой последовательности $\sigma \in \Sigma_\Pi$ пересечение $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} T^{-n}U_{\sigma_n}$ состоит ровно из одной точки.

Т е о р е м а [3, 8]. *Если η — конечное марковское разбиение пространства M с элементами достаточно малого диаметра, то*

- 1) $\Sigma_\Phi \cong \Sigma_\Pi$;
- 2) $\nu_\Sigma(\Sigma_\Phi \setminus \Sigma_\Pi) = 0$;

3) *отображение Φ^{-1} определено однозначно на Σ_Π и непрерывно на этом множестве.*

Эта теорема без труда переносится на счетные марковские разбиения, что отмечалось в [18].

Таким образом, любая последовательность σ , удовлетворяющая условиям «разрешенных переходов» $\pi_{\sigma_n\sigma_{n+1}} \equiv 1$, служит кодировкой некоторой траектории автоморфизма T .

1.3. Основной результат работы.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть область Q , порождающая двумерный рассеивающий бильярд, удовлетворяет условиям:*

А. Все внутренние углы, образованные пересечением гладких компонент границы ∂Q , строго положительны.

Б. Кратность всех точек пространства M_1 равномерно ограничена сверху некоторой константой $K_0 = K_0(Q) < \infty$ (это условие выполнено для областей Q общего положения).

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует счетное марковское разбиение пространства M_1 , диаметры всех элементов которого меньше ε .

Впервые марковские разбиения для двумерных рассеивающих бильярдов были построены в [18] (см. поправку в [20]). В данной работе конструкция [18] в ряде мест упрощена. Кроме того, мы проводим ее в более общей обстановке.

В отличие от гладких систем, для которых существует конечное марковское разбиение, в случае бильярдов на это не приходится надеяться. Дело в том, что ЛУМ и ЛНМ могут быть сколь угодно короткими, поэтому должны существовать элементы марковского разбиения, имеющие сколь угодно малые размеры.

Кроме того, наличие счетного марковского разбиения не дает возможности сразу получить те следствия, которые имеют место для гладкой системы с конечным марковским разбиением (это — оценка скорости убывания корреляций [19], центральная предельная теорема, асимптотика числа периодических траекторий [29]). В нашем случае получаемая символическая дина-

мика (Σ_{II}, θ) обладает некоторыми дополнительными свойствами (они частично описаны в [18]). Вывод этих свойств требует дополнительного исследования построенного марковского разбиения (этому посвящен ряд утверждений в § 5). Более подробно это будет обсуждаться в следующей публикации авторов.

З а м е ч а н и е 1.2 [3, 18]. Достаточно построить марковское разбиение η для $T_1 = T^m$ при некотором $m \geq 1$, поскольку тогда

$$\eta \vee T\eta \vee \dots \vee T^{m-1}\eta$$

будет марковским разбиением для T .

Доказательство теоремы 1.1 проводится в §§ 3—5. В §§ 3 и 4 строится так называемое предмарковское разбиение (промежуточный этап построения марковского разбиения). В § 3 мы накладываем одно дополнительное ограничение: $|\tau^\pm(x)| \leq \text{const}(Q) < \infty$ для всех $x \in M_1$ (такие системы называются *бильярдами с конечным горизонтом*). В § 4 исследуются бильярды с бесконечным горизонтом и результаты § 3 распространяются на этот случай. В § 5 с помощью предмарковского разбиения строится марковское. В § 6 результаты теоремы 1.1 переносятся на один класс нерассеивающих бильярдов с гиперболическим поведением. Наконец, в § 7 в качестве следствия теоремы 1.1 выводится экспоненциальная оценка снизу для числа периодических траекторий автоморфизма T . Мы надеемся, что с помощью построенного марковского разбиения возможно более полное исследование асимптотики числа периодических точек.

Авторы выражают благодарность А. Крамли и Д. Сасу, указавшим на одну неточность в тексте рукописи.

§ 2. Общие свойства двумерных рассеивающих бильярдов

Основное содержание § 2 составляет описание геометрической структуры кривых разрыва, ЛУМ и ЛНМ в пространстве M_1 . Ряд утверждений публикуется впервые.

2.1. Возрастающие и убывающие кривые. Гладкую (C^1) кривую γ в M_1 назовем *возрастающей* (*убывающей*), если она задается уравнением $\varphi = \varphi(r)$ и $d\varphi/dr \geq 0$ ($d\varphi/dr \leq 0$). Такие кривые будем также называть *монотонными*. Они обладают важным свойством полуинвариантности:

Л е м м а [10]. *Если γ — возрастающая (убывающая) кривая и T (T^{-1}) непрерывно на γ , то $T\gamma$ ($T^{-1}\gamma$) также является возрастающей (убывающей) кривой.*

Это свойство, по-существу, эквивалентно условию полуинвариантности системы устойчивых и неустойчивых конусов в касательном пространстве, введенных в [31].

Назовем кривую γ *m -возрастающей* (*m -убывающей*) при $m \geq 1$, если T^{-m} (T^m) непрерывно на γ и $T^{-m}\gamma$ ($T^m\gamma$) является возрастающей (убывающей). Очевидно, *m -возрастающие* (*m -убывающие*) кривые не пересекаются с $R_{0,m}$ ($R_{-m,0}$). Назовем кривую γ *нейтральной*, если γ — отрезок в R_0 .

Пусть возрастающая или убывающая кривая γ задана уравнением $\varphi = \varphi(r)$, $r_1 \leq r \leq r_2$. Обозначим $l(\gamma)$ ее длину в метрике $ds^2 = dr^2 + d\varphi^2$. Определим также *p -длину* кривой γ по формуле [21]

$$(2.1) \quad p(\gamma) = \int_{r_1}^{r_2} \cos \varphi \, d\varphi.$$

В каждой точке $x = (r, \varphi)$ кривой γ определим величины

$$(2.2) \quad \chi_\gamma^\pm(x) = \frac{1}{\cos \varphi} \left(\frac{d\varphi}{dr} \pm \kappa(r) \right),$$

где $\kappa(r)$ означает кривизну границы ∂Q (см. § 1).

З а м е ч а н и е 2.1. В силу гладкости компонент границы ∂Q имеем $0 < \kappa_{\min} \leq \kappa(r) \leq \kappa_{\max} < \infty$ для всех точек $r \in \partial Q$.

Раскроем явно геометрический смысл введенных величин (2.1 — 2.2). Точки кривой γ порождают «выходящий» пучок траекторий $\{S^t y\}$, $y \in \gamma$, $t > 0$. Рассмотрим ортогональное сечение $\sigma(x)$ этого пучка, проведенное через произвольную точку $x = (r, \varphi) \in \gamma$ (рис. 4) и его оснащение векторами нормали, направленными вдоль движения пучка. Тогда элемент p -длины кривой γ в точке x равен элементу длины сечения $\sigma(x)$ в точке x , а $\chi_\gamma^+(x)$ равно кривизне сечения $\sigma(x)$ в точке x . Аналогично, $\chi_\gamma^-(x)$ равно кривизне ортогонального сечения «входящего» пучка траекторий $\{S^t y\}$, $y \in \gamma$ при $t < 0$.

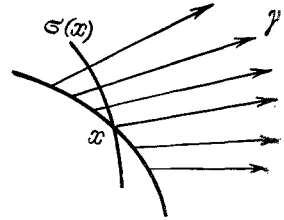


Рис. 4

2.2. Гиперболическая структура автоморфизма T . Исследуем вначале свойства растяжения и сжатия.

Л е м м а 2.2 [21]. Если T (T^{-1}) непрерывно на возрастающей (убывающей) кривой γ , то

$$p(T^{\pm 1}\gamma) = \int_{\gamma} (1 + \chi_{\gamma}^{\pm}(x) \tau^{\pm}(x)) \cos \varphi d\varphi$$

(«+» соответствует возрастающим кривым, «-» убывающим).

Заметим, что в случае убывающих кривых $\chi_{\gamma}^-(x) < 0$ и $\tau^-(x) < 0$. Поэтому возрастающие (убывающие) кривые растягиваются под действием T (T^{-1}). Важно оценить коэффициент растяжения. Из (2.2) и замечания 2.1 следует, что для возрастающих (убывающих) кривых γ имеет место оценка $\chi_{\gamma}^+(x) > \kappa_{\min} > 0$ (соответственно, $\chi_{\gamma}^-(x) < -\kappa_{\min} < 0$). Из условия А теоремы 1.1 легко вывести, что для некоторых постоянных $m_0 = m_0(Q)$ и $\tau_0 = \tau_0(Q) > 0$ выполнено

У т в е р ж д е н и е 2.3 [11, 14]. Для любой точки $x \in M_1$ среди m_0 первых отражений ее траектории от края ∂Q найдутся два соседних отражения, между которыми отрезок траектории имеет длину не менее τ_0 .

Иначе говоря, траектории биллиарда не могут испытывать сколь угодно много отражений, находясь в малой окрестности одной из точек излома границы ∂Q .

Из утверждений 2.2 и 2.3 вытекает

Л е м м а 2.4. Если T^{m_0} (T^{-m_0}) непрерывно на возрастающей (убывающей) кривой γ , то

$$\frac{p(T^{m_0}\gamma)}{p(\gamma)} \geq \Lambda_0, \quad \frac{p(T^{-m_0}\gamma)}{p(\gamma)} \geq \Lambda_0,$$

где $\Lambda_0 = 1 + \kappa_{\min}\tau_0 > 1$ — постоянная для Q .

Тем самым, растяжение и сжатие в касательном пространстве к M_1 под действием автоморфизма T^{m_0} носит равномерный характер.

Для $m \geq 1$ обозначим Λ_m минимальный коэффициент растяжения возрастающих (убывающих) кривых под действием T^m (T^{-m}).

С л е д с т в и е 2.5. $\Lambda_m \geq \Lambda_0^{\lfloor m/m_0 \rfloor}$.

Наконец, исследуем углы между устойчивыми и неустойчивыми направлениями в касательном пространстве к M_1 .

Пусть γ — возрастающая кривая и T^m , $m \geq 1$, непрерывно на γ . Тогда для каждой точки $x \in \gamma$ имеем [10, 21]:

$$(2.3) \quad \chi_{T^m\gamma}^+(x_m) = \frac{2\kappa_m}{\cos \varphi_m} + \frac{1}{\tau_m + \frac{1}{\frac{2\kappa_{m-1}}{\cos \varphi_{m-1}} + \tau_{m-1} + \dots + \frac{1}{\tau_1 + (\chi_{\gamma}^+(x))^{-1}}}},$$

где обозначено $x_i = (r_i, \varphi_i) = T^i x$, $\kappa_i = \kappa(r_i)$, $\tau_i = \tau^+(x_{i-1})$. Аналогичная формула верна для убывающих кривых. Описание гиперболических свойств бильярдных систем с помощью цепных дробей появилось в [10]. Формула (2.3) позволяет доказать следующие оценки производной $d\varphi/dr$ для монотонных кривых:

Л е м м а 2.6. Для любой l -возрастающей (l -убывающей) кривой $\varphi = \varphi(r)$ выполнено

$$|d\varphi/dr| \geq \kappa(r) \geq \kappa_{\min}.$$

Эта же оценка справедлива для гладких компонент множеств R_l и R_{-l} .

Л е м м а 2.7. Для любой m_0 -возрастающей (m_0 -убывающей) кривой $\varphi = \varphi(r)$, лежащей в $M^{(i)}$, выполнено

$$|d\varphi/dr| \leq \text{const}(Q) (d(r))^{-1/2},$$

где $d(r)$ — расстояние от точки $r \in \Gamma_i$ до ближайшего конца кривой Γ_i (для замкнутых кривых Γ_i можно положить $d(r) \equiv 1$).

Таким образом, в окрестности множества V_0 углы между устойчивым и неустойчивым направлениями не отделены от нуля. Поэтому если $V_0 \neq \emptyset$, то бильярдная система является лишь неравномерно гиперболической (см. также [22]).

Из лемм 2.6 и 2.7 легко выводится, что для m_0 -возрастающих и m_0 -убывающих кривых γ выполнено соотношение

$$(2.4) \quad \sqrt{1 + \kappa_{\min}^2 p(\gamma)} \leq l(\gamma) \leq \text{const}(Q) \sqrt{p(\gamma)}.$$

Для монотонной кривой γ и точек $a, b \in \gamma$ будем обозначать $\gamma(a, b)$ отрезок кривой γ от a до b .

2.3. Кривые разрыва.

Л е м м а [18]. Гладкие компоненты множества $R_{l, k}$, $(R_{-k, -l})$ при $k \geq 1$ являются возрастающими (убывающими) кривыми.

Л е м м а 2.8. Любая гладкая компонента множества $R_{l, k}$ ($R_{-k, -l}$) при $k \geq 1$ лежит на некоторой непрерывной (не обязательно гладкой) монотонной кривой в $R_{0, k}$ ($R_{-k, 0}$), концы которой принадлежат R_0 . Для любых целых $l < k$ множество $R_{l, k}$ разбивает M_1 на криволинейные многоугольники, внутренние углы которых не превышают 180° .

Доказательство проводится индукцией по l, k с помощью несложного геометрического анализа.

На рис. 5 изображена типичная структура кривых разрыва.

Будем обозначать $O_{\varepsilon, m}^+$ ($O_{\varepsilon, m}^-$) объединение всех l -возрастающих и l -убывающих кривых p -длины не более ε , оканчивающихся на $R_{0, m}$ ($R_{-m, 0}$).

З а м е ч а н и е 2.9 [18]. В бильярдах с конечным горизонтом множество $R_{l, k}$ при любых целых $l < k$ состоит из конечного числа гладких компонент.

З а м е ч а н и е 2.10. В бильярдах с конечным горизонтом для любого $1 \leq m < \infty$ найдется $\delta_0 = \delta_0(m) > 0$ такое, что любая возрастающая (убывающая) кривая p -длины не более δ_0 пересекается с $R_{-m, 0}$ ($R_{0, m}$) не более чем в K_0 точках.

2.4. ЛНМ и ЛУМ для двумерных рассеивающих бильярдov построены и подробно описаны в [10, 22]. Они являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений $d\varphi/dr = B^u(r, \varphi) \cos \varphi + \kappa(r)$ (для ЛНМ)

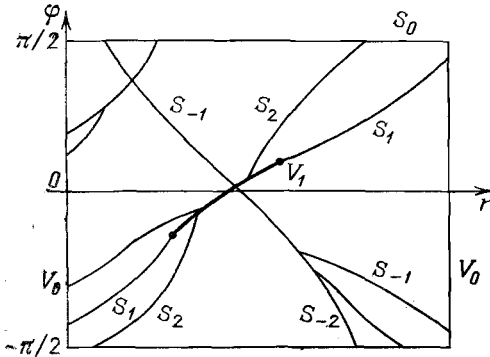


Рис. 5

и $d\varphi/dr = -B^s(r, \varphi) \cos \varphi - \kappa(r)$ (для ЛУМ). Здесь

$$(2.5) \quad B^s(r, \varphi) = \frac{1}{\tau_1 + \frac{2\kappa_1}{\cos \varphi_1} + \frac{1}{\tau_2 + \frac{2\kappa_2}{\cos \varphi_2} + \dots}}$$

— непрерывная цепная дробь, в которой обозначено $(r_n, \varphi_n) = T^n(r, \varphi)$, $\kappa_n = \kappa(r_n)$ и $\tau_n = \tau^+(T^{n-1}(r, \varphi))$. Величина $B^u(r, \varphi)$ определяется аналогично по полутраектории $T^n(r, \varphi)$ при $n \leq 0$. Легко видеть, что все элементы дроби (2.5) положительны и $\sum_n \tau_n = \infty$. Отсюда следует [15], что $B^s(r, \varphi)$

определено для всех точек $x \in M_1 \setminus R_{-\infty, 0}$. Аналогично, $B^u(r, \varphi)$ определено для всех $x \in M_1 \setminus R_{0, \infty}$. Кроме того, величины $B^u(r, \varphi)$ и $B^s(r, \varphi)$ как функции от $x = (r, \varphi)$ непрерывны в области определения [40].

Эти свойства ЛУМ и ЛНМ позволяют доказать следующее.

Л е м м а 2.11. *Если $\{\gamma_n\}$ — последовательность k_n -возрастающих (k_n -убывающих) кривых, сходящаяся в метрике C^0 к некоторой непрерывной кривой γ и $k_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то γ является ЛНМ (ЛУМ).*

Таким образом, k -возрастающие (k -убывающие) кривые аппроксимируют ЛНМ (ЛУМ) при больших k . В частности, ЛНМ (ЛУМ) являются возрастающими (убывающими) кривыми, поэтому множество $[x, y]$ для любых $x, y \in M_1$ состоит не более чем из одной точки.

Известно, что длина ЛНМ $\gamma^u(x)$ (ЛУМ $\gamma^s(x)$) для $x \in M_1$ зависит от того, насколько близко траектория $T^n x$ при $n < 0$ ($n > 0$) может подходить к краю ∂M_1 . Чтобы дать строгую формулировку, определим $d^+(x)$ ($d^-(x)$) при $x \in M_1$ как минимальную p -длину l -возрастающих (l -убывающих) кривых, соединяющих точку x с множеством $R_{0,1}$ ($R_{-1,0}$). Обозначим M_2^+ (M_2^-) множество точек $x \in M_1$, обладающих следующим свойством: для любого $\lambda < 1$ найдется $c^+(x, \lambda) > 0$ ($c^-(x, \lambda) > 0$) такое, что $d^+(T^n x) \geq c^+(x, \lambda) \lambda^{-n}$ ($d^-(T^n x) \geq c^-(x, \lambda) \lambda^n$) при всех $n \leq 0$ ($n \geq 0$). Грубо говоря, множество M_2^+ (M_2^-) состоит из точек, траектории которых в прошлом (будущем) приближаются к краю достаточно медленно (медленнее любой экспоненты).

Л е м м а 2.12. *Пусть $x \in M_2^+$ ($x \in M_2^-$). Тогда*

а) p -длина отрезков ЛНМ $\gamma^u(x)$ (ЛУМ $\gamma^s(x)$) от точки x до его концов не меньше $A_0 c^+(x, \lambda_0)$ ($A_0 c^-(x, \lambda_0)$);

б) $\gamma^u(x) \subset M_2^+$ ($\gamma^s(x) \subset M_2^-$).

Здесь $\lambda_0 = \Lambda_0^{-1/m_0}$ и $A_0 = \Lambda_0^{-2}$.

Л е м м а 2.13. *Если $x \in M_2^+$ ($x \in M_2^-$), то концы ЛНМ $\gamma^u(x)$ (ЛУМ $\gamma^s(x)$) принадлежат множеству $R_{0, \infty}$ ($R_{-\infty, 0}$).*

Доказательство лемм вытекает непосредственно из построения ЛНМ и ЛУМ [22] и мы его опускаем.

Обозначим $M_2 = M_2^+ \cap M_2^-$. Очевидно, $T^{-1}M_2^+ \subseteq M_2^+$, $TM_2^- \subseteq M_2^-$ и $TM_2 = T^{-1}M_2 = M_2$. Из леммы 2.12 (б) следует, что если $x, y \in M_2$ и точка $[x, y]$ определена, то $[x, y] \in M_2$ (в этом смысле M_2 имеет структуру прямого произведения).

Хорошо известно, что $\nu(M_2) = 1$ (см., например, [21]). Это немедленно следует из леммы Бореля — Кантелли и оценки

$$(2.6) \quad \nu \{x: d^\pm(x) \leq \varepsilon\} \leq \text{const}(Q) \varepsilon$$

(для билиардов с конечным горизонтом эта оценка вытекает из замечания 2.9; в случае бесконечного горизонта доказательство несложно получается из оценок, приведенных в § 4).

Наконец, отметим, что два ЛНМ (ЛУМ) не могут пересекаться, но могут иметь общие концы, лежащие на кривых разрыва из $R_{0, \infty}$ ($R_{-\infty, 0}$).

2.5. Регулярные разбиения. Для дальнейшего условимся обозначать $\text{int } A$ и $\text{clos } A$ соответственно, внутренность и замыкание множества $A \subset M_1$, а также $\mathcal{F}(A) = \text{clos}(\text{int } A)$.

О п р е д е л е н и е. Назовем *регулярным разбиением* ξ конечное или счетное покрытие (mod 0) пространства M_1 множествами $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ такими, что:

а) $v(M_1 \setminus \bigcup_i \Delta_i) = 0$ и $v(\Delta_i \cap \Delta_j) = 0$ при $i \neq j$;

б) каждое Δ_i является объединением конечного или счетного числа замкнутых областей в M_1 и $\Delta_i = \mathcal{F}(\Delta_i)$;

в) каждая связная компонента $A \subset \Delta_i$ имеет кусочно-гладкую границу, состоящую из конечного числа монотонных или нейтральных кривых.

Для каждого $\Delta_i \in \xi$ обозначим $\partial^u \Delta_i$ ($\partial^s \Delta_i$) объединение всех возрастающих (убывающих) компонент $\partial \Delta_i$ и $\partial^u \xi = \bigcup_i \partial^u \Delta_i$, $\partial^s \xi = \bigcup_i \partial^s \Delta_i$, $\partial \xi = \partial^u \xi \cup \bigcup \partial^s \xi \cup R_0$.

Если ξ и ζ — регулярные разбиения, то обозначим $\xi \vee \zeta$ регулярное разбиение, состоящее из множеств $\Delta = \mathcal{F}(\Delta' \cap \Delta'')$, $\Delta' \in \xi$, $\Delta'' \in \zeta$.

Одним из способов построения регулярных разбиений со связными элементами является задание его границы $\partial \xi$. А именно, конечную или счетную систему Γ монотонных кривых назовем *согласованной*, если концы каждой кривой лежат либо на двух других кривых из Γ , либо на R_0 . Тогда кривые $\gamma \in \Gamma$ вместе с R_0 разбивают M_1 на связные области, замыкания которых образуют регулярное разбиение.

§ 3. Построение предмарковского разбиения

Напомним, что в § 3 мы рассматриваем бильярды с конечным горизонтом.

В силу замечания 1.2 для доказательства теоремы 1.1 достаточно построить марковское разбиение для $T_1 = T^m$ при некотором $m \geq 1$. Будем далее обозначать $m_1 = m + m_0$. Конструкция марковского разбиения будет зависеть от некоторого малого параметра $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(m)$. Выбор величин m и $\varepsilon_0(m)$ осуществляется в процессе построения.

3.1. Начальное разбиение ξ_0 . Первым шагом будет построение регулярного разбиения пространства M_1 , произведенное достаточно произвольным образом. Мы будем следить лишь за тем, чтобы размеры его элементов и их положения удовлетворяли некоторым весьма свободным ограничениям. Искомое разбиение ξ_0 задается конечной системой согласованных кривых, образующих $\partial \xi_0$, как описано в п. 2.5.

П р е д л о ж е н и е 3.1. В пространстве M_1 можно выбрать конечную систему m_1 -возрастающих кривых $\Gamma_0^+ = \{\gamma_i^+\}$, $1 \leq i \leq I_0^+$, и конечную систему m_1 -убывающих кривых $\Gamma_0^- = \{\gamma_i^-\}$, $1 \leq i \leq I_0^-$, такие, что:

- а) r -длины кривых из $\Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$ заключены в пределах от $\lambda_1 \varepsilon$ до $\lambda_1^{-1} \varepsilon$;
- б) кривые из Γ_0^+ (Γ_0^-) лежат вне $O_{\lambda_1 \varepsilon, m_1}^+$ ($O_{\lambda_1 \varepsilon, m_1}^-$);
- в) (согласованность) концы каждой кривой из Γ_0^+ (Γ_0^-) лежат на каких-то двух кривых из Γ_0^- (Γ_0^+);
- г) любая m_0 -возрастающая (m_0 -убывающая) кривая r -длины $\lambda_1^{-1} \varepsilon$ пересекает хотя бы одну из кривых $\gamma \in \Gamma_0^-$ ($\gamma \in \Gamma_0^+$) таким образом, что точка пересечения делит кривую γ на отрезки r -длины не менее $\lambda_1 \varepsilon$.

Здесь $\lambda_1 = \lambda_1(Q) \in (0, 1)$ — постоянная, не зависящая от m .

Отметим, что требование г) означает определенную плотность заполнения пространства M_1 каждой из систем кривых Γ_0^+, Γ_0^- .

Доказательство. Выберем конечную $c_1\varepsilon$ -сеть $\{x_i^+, 1 \leq i \leq I_0^+\}$ ($\{x_i^-, 1 \leq i \leq I_0^-\}$) в множестве $M_1 \setminus O_{2\varepsilon, m_1}^+$ ($M_1 \setminus O_{2\varepsilon, m_1}^-$). Здесь $c_1 = \min\{1, \kappa_{\min}\}/2$, а $c_1\varepsilon$ -сеть выбирается в смысле метрики $ds^2 = dr^2 + d\varphi^2$. Через каждую точку x_i^+ (x_i^-) проведем произвольную m_1 -возрастающую (m_1 -убывающую) кривую $\hat{\gamma}_i^+$ ($\hat{\gamma}_i^-$), которую точка x_i^+ (x_i^-) делит на два отрезка p -длины ε . Обозначим \hat{a}_i^+ и \hat{b}_i^+ концы кривой $\hat{\gamma}_i^+$ (рис. 6). Отметим на $\hat{\gamma}_i^+$ точки $\hat{a}_{i,1}^+$ и $\hat{b}_{i,1}^+$ такие, что $p(\hat{\gamma}_i^+(\hat{a}_{i,1}^+, \hat{a}_i^+)) = p(\hat{\gamma}_i^+(\hat{b}_{i,1}^+, \hat{b}_i^+)) = \varepsilon/10$. В силу замечания 2.10 при достаточно малом $\varepsilon_0(m)$ каждый из отрезков $\hat{\gamma}_i^+(\hat{a}_{i,1}^+, \hat{a}_i^+)$ и $\hat{\gamma}_i^+(\hat{b}_{i,1}^+, \hat{b}_i^+)$ пересекает не более K_0 кривых разрыва из $R_{-m,0}$ ($R_{0,m}$). Поэтому найдется точка a_i^+ на отрезке $\hat{\gamma}_i^+(\hat{a}_{i,1}^+, \hat{a}_i^+)$ и точка b_i^+ на отрезке $\hat{\gamma}_i^+(\hat{b}_{i,1}^+, \hat{b}_i^+)$, не лежащие в множестве $O_{5c_2\varepsilon, m_1}^+ \cup O_{5c_2\varepsilon, m_1}^-$, где $c_2 = (100K_0)^{-1}$. Сделаем дополнительное построение: через точку a_i^+ кривой $\hat{\gamma}_i^+$ проведем m_1 -убывающую кривую p -длины $c_2\varepsilon$ с концами в a_i^+ и в некоторой точке $a_{i,1}^+$. Далее,

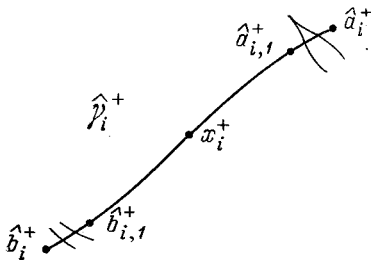


Рис. 6

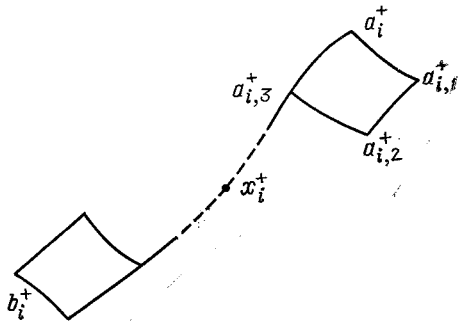


Рис. 7

через точку $a_{i,1}^+$ проведем m_1 -возрастающую кривую p -длины $c_2\varepsilon$ с концами в $a_{i,1}^+$ и некоторой точке $a_{i,2}^+$. Наконец, через точку $a_{i,2}^+$ проведем m_1 -убывающую кривую до пересечения с $\hat{\gamma}_i^+$ в некоторой точке $a_{i,3}^+$, лежащей на отрезке $\hat{\gamma}_i^+(a_i^+, x_i^+)$ (рис. 7). При достаточно малом $\varepsilon_0(m)$ это построение можно провести таким образом, чтобы p -длины последней построенной кривой и кривой $\hat{\gamma}_i^+(a_i^+, a_{i,3}^+)$ были заключены в пределах от $c_2\varepsilon/2$ до $2c_2\varepsilon$. Аналогичную «петлю» из трех дополнительных кривых построим около точки b_i^+ (рис. 7). Такие же «петли» построим около точек a_i^-, b_i^- кривых $\hat{\gamma}_i^-, 1 \leq i \leq I_0^-$ (в этом случае монотонность каждой кривой меняется на противоположную). Обозначим $\gamma_i^\pm = \hat{\gamma}_i^\pm(a_i^\pm, b_i^\pm), 1 \leq i \leq I_0^\pm$.

Искомая система Γ_0^\pm состоит из кривых $\gamma_i^\pm, 1 \leq i \leq I_0^\pm$, и из всех возрастающих (убывающих) кривых, входящих в построенные выше петли в окрестностях концов кривых $\hat{\gamma}_i^\pm$. Легко посчитать, что $I_0^\pm = 7I_0^\pm$.

Утверждения а) — в) предложения 3.1 проверяются непосредственно. Докажем утверждение г). Предположим, что $\lambda_1^{-1} \geq 10K_0$. В силу замечания 2.10 при достаточно малом $\varepsilon_0(m)$ любая m_0 -возрастающая кривая γ p -длины $\lambda_1^{-1}\varepsilon$ пересекает не более K_0 кривых разрыва из $R_{-m_1,0}$. Поэтому найдется отрезок $\hat{\gamma}$ p -длины 5ε на этой кривой, не пересекающийся с $R_{-m_1,0}$. Выберем точку $x_0 \in \hat{\gamma}$, не лежащую в $O_{2\varepsilon, m_1}^+$. Тогда найдется точка $x_i^-, 1 \leq i \leq I_0^-$, отстоящая от x_0 не более чем на $c_1\varepsilon$. Нетрудно проверить, что кривые $\hat{\gamma}_i^-$ и $\hat{\gamma}$ пересекаются, и точка пересечения делит первую из них на два отрезка p -длины не менее $\lambda_1\varepsilon$. Случай m_0 -убывающей кривой γ рассматривается аналогично. Предложение доказано.

Заметим, что мы можем положить $\lambda_1 = (200K_0)^{-1}$.

3.2. Предмарковское разбиение ξ . Следующий шаг состоит в замене гладких кривых из Γ_0^\pm на близкие к ним отрезки ЛНМ и ЛУМ. Полученная система ЛНМ и ЛУМ должна быть согласованной с динамикой T^m , а именно, образ каждого ЛНМ (ЛУМ) под действием T^{-m} (T^m) обязан попадать внутрь некоторого другого ЛНМ (ЛУМ) этой же системы.

Дадим точное определение. Пусть ξ — регулярное разбиение, все компоненты границы которого являются кривыми разрыва и отрезками ЛНМ и ЛУМ.

О п р е д е л е н и е. Разбиение ξ называется *предмарковским* для T^m , если

$$(3.1) \quad T^m(\partial^s \xi) \subseteq \partial \xi \quad \text{и} \quad T^{-m}(\partial^u \xi) \subseteq \partial \xi.$$

Если это определение формально распространить на гладкие гиперболические системы, то (поскольку кривых разрыва нет) из соотношения (3.1) следует марковость разбиения ξ . Поэтому построение предмарковского разбиения ξ для билиардов можно провести так же, как и построение марковского разбиения для двумерных гладких систем [2, 9].

Прежде всего необходимо «запаситься» достаточно большим коэффициентом растяжения (сжатия) для автоморфизма $T_1 = T^m$ (по этой причине мы и переходим к T_1). Выберем m настолько большим, что

$$(3.2) \quad \Lambda_m \geq (\varepsilon \lambda_1^2)^{-1} > 1$$

при некотором $\varepsilon < 1/2$, значение которого будет указано ниже.

Переходим непосредственно к построению. Рассмотрим произвольную кривую $\gamma_0 \in \Gamma_0^-$. Ее концы a_1, a_2 лежат на некоторых кривых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0^+$. Согласно 3.1 б), кривые γ_r ($r = 1, 2$) можно продолжить в обе стороны от точек a_r на p -расстояние $\lambda_1 \varepsilon$ с сохранением свойства m_1 -возрастания. Отметим точки a'_1 и a'_2 соответственно на γ_1 и γ_2 , лежащие по одну сторону от кривой γ_0 так, что $p(\gamma_r(a_r, a'_r)) = \varepsilon \lambda_1 \varepsilon$, $r = 1, 2$ (рис. 8, а). Легко видеть, что либо из точки a'_1 можно провести m_1 -убывающую кривую, пересекающую $\gamma_2(a_2, a'_2)$, либо наоборот, из точки a'_2 можно провести m_1 -убывающую кривую до пересечения с $\gamma_1(a_1, a'_1)$. Не ограничивая общности, предположим первое.

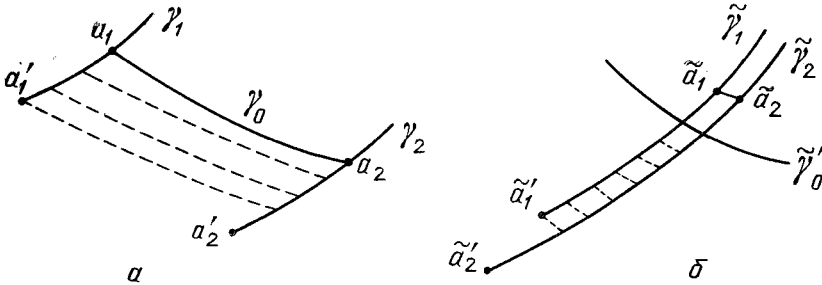


Рис. 8

Тогда из любой точки отрезка $\gamma_1(a_1, a'_1)$ также можно провести m_1 -убывающую кривую до пересечения с $\gamma_2(a_2, a'_2)$, причем p -длина этой кривой будет не более $2\lambda_1 \varepsilon$.

Рассмотрим кривые $\tilde{\gamma}_r = T_1 \gamma_r$ при $r = 0, 1, 2$ и точки $\tilde{a}_r = T_1 a_r$, $\tilde{a}'_r = T_1 a'_r$ при $r = 1, 2$ (рис. 8, б). В силу (3.2) $p(\tilde{\gamma}_0(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)) \leq \varepsilon \lambda_1^3 \varepsilon$ и $p(\tilde{\gamma}_r(\tilde{a}_r, \tilde{a}'_r)) \geq \lambda_1^{-1} \varepsilon$. Кроме того, через каждую точку отрезка $\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}_1, \tilde{a}'_1)$ можно провести m_0 -убывающую кривую p -длины не более $2\varepsilon \lambda_1^3 \varepsilon$ до пересечения с $\tilde{\gamma}_2(\tilde{a}_2, \tilde{a}'_2)$ (это обеспечивает близость отрезка $\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}_1, \tilde{a}'_1)$ к отрезку $\tilde{\gamma}_2(\tilde{a}_2, \tilde{a}'_2)$). В силу

предложения 3.1 г) найдется кривая $\tilde{\gamma}'_0 \in \Gamma_0^-$, пересекающая оба отрезка $\tilde{\gamma}_r (\tilde{a}_r, \tilde{a}'_r)$, $r = 1, 2$. Предположим также, что $\tilde{\gamma}'_0$ — ближайшая к точкам \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 из всех таких кривых. Обозначим $\tilde{\gamma}''_0$ отрезок кривой $\tilde{\gamma}'_0$, заключенный между кривыми $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$. Тогда $\tilde{\gamma}_0 = T_1^{-1}\tilde{\gamma}''_0$ является $2m$ -убывающей кривой, концы которой лежат на $\gamma_1 (a_1, a'_1)$ и $\gamma_2 (a_2, a'_2)$.

Такую кривую $\hat{\gamma}_i$ построим для каждой кривой $\gamma_i \in \Gamma_0^-$. Полученный набор кривых $\{\hat{\gamma}_i\}$ обозначим Γ_1^- . После этого каждую кривую $\gamma_i \in \Gamma_0^+$ удлинним или укоротим с каждого из ее концов так, чтобы она оканчивалась на кривых $\hat{\gamma}_i, \hat{\gamma}_{i_2} \in \Gamma_1^-$, если ранее она оканчивалась на $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2} \in \Gamma_0^-$ (при удлинении свойство m_1 -возрастания сохраняется, что обеспечивается условием б) предложения 3.1).

Аналогичную процедуру (с заменой T_1 на T_1^{-1}) проведем для каждой кривой $\gamma_i \in \Gamma_0^+$ и получим новую систему кривых Γ_1^+ , состоящую из $2m$ -возрастающих кривых. Системы Γ_1^\pm удовлетворяют соотношению

$$\forall \tilde{\gamma} \in \Gamma_1^\pm \exists \gamma \in \Gamma_0^\pm: T_1^{\mp 1} \tilde{\gamma} \subset \gamma$$

(здесь и всюду в § 3 включение « \subset » означает, что одна кривая лежит строго внутри другой). Между кривыми $\tilde{\gamma} \in \Gamma_1^\pm$ и $\gamma \in \Gamma_0^\pm$ имеется естественное соответствие, при котором соответствующие кривые отстоят друг от друга не более чем на $\varepsilon \lambda_1 \varepsilon$.

К полученным системам кривых Γ_1^\pm вновь применим описанную выше процедуру, в результате чего заменим каждую кривую $\gamma \in \Gamma_1^\pm$ на близкую к ней кривую $\hat{\gamma}$. Полученные на этом шаге системы кривых $\{\hat{\gamma}\}$ обозначим Γ_2^\pm . Повторяя эту процедуру рекуррентно, получим последовательность систем кривых Γ_n^\pm , $n = 1, 2, \dots$

Л е м м а 3.2. *Кривые $\gamma \in \Gamma_n^+$ ($\gamma \in \Gamma_n^-$) являются $(n + 1)$ -возрастающими ($(n + 1)$ -убывающими). Они подчиняются условию*

$$\forall \hat{\gamma} \in \Gamma_n^\pm \exists \gamma \in \Gamma_{n-1}^\pm: T_1^{\mp 1} \hat{\gamma} \subset \gamma.$$

Между кривыми $\hat{\gamma} \in \Gamma_n^\pm$ и $\gamma \in \Gamma_{n-1}^\pm$ имеется естественное соответствие, при котором соответственные кривые отстоят друг от друга не более чем на $(\varepsilon \lambda_1)^n \varepsilon$.

Л е м м а д о к а з ы в а е т с я по индукции.

Л е м м а 3.3. *Системы кривых Γ_n^\pm имеют пределы при $n \rightarrow \infty$ (в метрике C^0), которые мы обозначим Γ_∞^\pm . Предельная система Γ_∞^+ (Γ_∞^-) состоит из отрезков ЛНМ (ЛУМ), удовлетворяющих условиям:*

- а) $\forall \gamma \in \Gamma_\infty^\pm \exists \gamma' \in \Gamma_\infty^\pm: T_1^{\mp 1} \gamma \subset \gamma'$;
- б) *между кривыми $\hat{\gamma} \in \Gamma_\infty^\pm$ и $\gamma \in \Gamma_0^\pm$ имеется естественное соответствие, при котором соответственные кривые отстоят друг от друга не более чем на $2\varepsilon \lambda_1 \varepsilon$;*
- в) *(согласованность) концы каждой кривой $\gamma \in \Gamma_\infty^\pm$ лежат на каких-то двух кривых из Γ_∞^\pm .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование предельных систем Γ_∞^\pm и утверждения а), б), в) выводятся из леммы 3.2 простым предельным переходом. Кривые $\gamma \in \Gamma_\infty^\pm$ являются ЛНМ (ЛУМ) в силу леммы 2.11.

Выбрав значение ε достаточно малым ($\varepsilon \leq \lambda_1/200$), мы сможем использовать идею доказательства предложения 3.1 г) для вывода следующей леммы:

Л е м м а 3.4. *Любая m_0 -возрастающая (m_0 -убывающая) кривая r -длины $\lambda_1^{-1} \varepsilon$ пересекает некоторый отрезок ЛУМ из Γ_∞^- (ЛНМ из Γ_∞^+), причем точка пересечения делит этот отрезок на две части r -длины не менее $\frac{1}{2} \lambda_1 \varepsilon$.*

Наконец, разбиение ξ пространства M_1 задается системами кривых Γ_∞^+ , Γ_∞^- и $R_{-m, m}$, порождающими $\partial\xi$.

Предложение. Разбиение ξ конечно и предмарковское для T_1 .

Конечность разбиения ξ следует из того, что любые две гладкие компоненты из $R_{-m, m}$, Γ_∞^- и Γ_∞^+ пересекаются не более чем в двух точках.

3.3. Модифицированное разбиение ξ_1 . Элементы построенного выше предмарковского разбиения ξ имеют слишком сложный вид (особенно те, которые граничат с $R_{-m, m}$). Мы построим предмарковское разбиение с элементами более простой формы.

Рассмотрим системы кривых $\Gamma_{(i)}^\pm$, состоящие из кривых $\gamma \in \Gamma_\infty^\pm$ и гладких компонент их образов $T_1^{\pm 1}\gamma$. Определим регулярное разбиение ξ_1 , задав его границу с помощью систем кривых $\Gamma_{(i)}^\pm$ и кривых разрыва $R_{-m, m}$.

Предложение 3.5. Разбиение ξ_1 конечно и предмарковское для T_1 . Каждая кривая $\gamma \in \Gamma_{(i)}^\pm$ оканчивается либо на $R_{-m, m}$, либо строго внутри некоторых кривых из $\Gamma_{(i)}^\mp$.

Доказательство. Предмарковость ξ_1 следует из предмарковости ξ . Конечность проверяется так же, как и для ξ . Последнее утверждение в 3.5 вытекает из соотношения а) в лемме 3.3 (вспомним наше соглашение об использовании символа включения « \subset »!).

Следующая лемма дает описание геометрической формы элементов разбиения ξ_1 .

Лемма 3.6. а) Если элемент $\Delta \in \xi_1$ не граничит с $R_{-m, m}$, то он является криволинейным четырехугольником, ограниченным двумя ЛНМ и двумя ЛУМ, чередующимися друг с другом (рис. 9, а);

б) Если элемент $\Delta \in \xi_1$ граничит с $R_{-m, m}$, то он является криволинейным многоугольником, ограниченным отрезками ЛНМ, ЛУМ и кривыми разрыва так, что все его внутренние углы не превышают 180° .

Лемма доказывается несложными геометрическими построениями с использованием леммы 2.8. Нетрудно подсчитать, что число сторон многоугольника $\Delta \in \xi_1$ заключено в пределах от 3 до 6 (рис. 9, б, в).

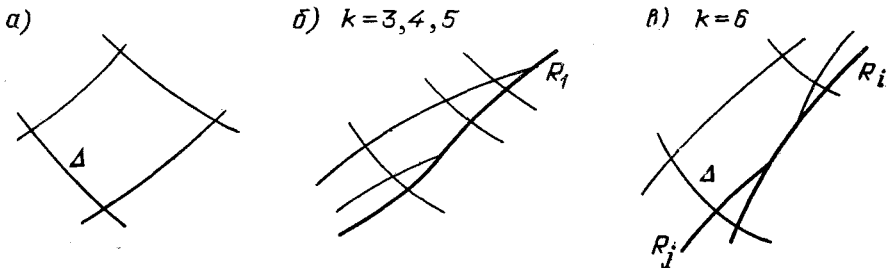


Рис. 9

Следствие 3.7. Диаметры элементов предмарковского разбиения ξ_1 не превышают $\text{const}(Q)\sqrt{\varepsilon}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную монотонную кривую γ внутри элемента $\Delta \in \xi_1$. В силу леммы 3.4 и соотношения (2.4) $l(\gamma) \leq \text{const}(Q)\sqrt{\varepsilon}$. Отсюда и из леммы 3.6 вытекает необходимый результат.

3.4. В заключение рассмотрим разбиение $\xi_n = T_1^{-n+1}\xi_1 \vee \dots \vee \xi_1 \vee T_1\xi_1 \vee \dots \vee T_1^{n-1}\xi_1$. Индукцией по n легко показать, что ξ_n — предмарковское разбиение для любого n . Отсюда и из леммы 3.6 следует, что все элементы разбиения ξ_n связаны и представляют собой криволинейные многоугольники, все внутренние углы которых не превышают 180° . Из гиперболи-

ческих свойств T и леммы 3.4 следует, что диаметры элементов $\Delta \in \xi_n$ стремятся к нулю с ростом n , поэтому $\lim \xi_n = \varepsilon$ (здесь ε означает разбиение на отдельные точки).

§ 4. Случай бесконечного горизонта

Данный параграф может быть пропущен при первом чтении без ущерба для понимания дальнейшего.

4.1. Биллиарды с бесконечным горизонтом возможны только на торе Tor^2 . Если функция $\tau^+(x)$ (или $\tau^-(x)$) неограниченна в окрестности точки $z_0 \in M_1$, то:

а) ее полутраектория $\{S^t z_0\}$ при $t > 0$ ($t < 0$) представляет собой замкнутую периодическую обмотку тора;

б) во всех точках соприкосновения этой полутраектории с границей ∂Q соответствующие компоненты ∂Q лежат по одну сторону от рассматриваемой полутраектории (рис. 10).

Будем называть такие точки *u-особыми* (*s-особыми*). На рис. 10 точки z_1, z_2 являются *s-особыми*, но не *u-особыми*, а точки z_3, z_4 — одновременно и *u-* и *s-особыми*. Из вышесказанного следует, что в M_1 существует лишь конечное число *u-особых* и *s-особых* точек и все они лежат на R_0 . Отметим, что несколько особых точек могут иметь общую полутраекторию (точки z_1 и z_3, z_2 и z_4 на рис. 10).

Будем различать три типа особых точек z :

- 1) тип S при $z \in S_0 \setminus V_0$;
- 2) тип V при $z \in V_0 \setminus S_0$;
- 3) тип SV при $z \in S_0 \cap V_0$.

Эти типы будем называть *общими*. Для каждой *u-особой* (*s-особой*) точки z_0 обозначим $Z^u(z_0)$ ($Z^s(z_0)$) множество *s-особых* (*u-особых*) точек $\{z\}$, носители $\pi(z)$ которых не лежат на полутраектории $\{S^t z_0\}$ при $t < 0$ ($t > 0$) и таких, что $TV(z) \cap V(z_0) \neq \emptyset$ (соответственно, $T^{-1}V(z) \cap V(z_0) \neq \emptyset$), где $V(z)$

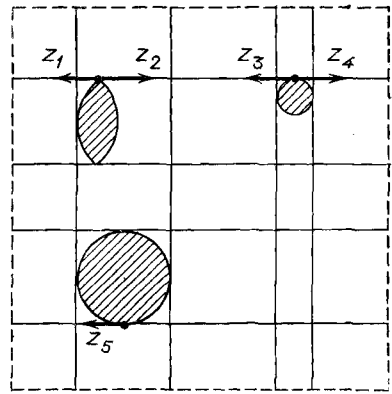


Рис. 10

означает достаточно малую окрестность особой точки z в M_1 . Например, $Z^u(z_5) = \{z_1, z_3\}$ на рис. 10. Для каждой *u-особой* (*s-особой*) точки z введем *u-тип* (*s-тип*), принимающий одно из шести значений: $S_{\text{чист}}$, $V_{\text{чист}}$, $SV_{\text{чист}}$, $S_{\text{см}}$, $V_{\text{см}}$, $SV_{\text{см}}$, где S, V или SV — общий тип самой особой точки z , а индекс «чист» или «см» означает, что множество $Z^u(z)$ ($Z^s(z)$) состоит соответственно из точек только «чистых» типов (S или V), или же содержит хотя бы одну точку «смешанного» типа SV .

В окрестностях *u-особых* (*s-особых*) точек лежит бесконечное (счетное) число гладких компонент множества $R_1(R_{-1})$. Гладкие компоненты $R_1(R_{-1})$ разбивают эти окрестности на счетное число подобластей, называемых далее *u-ячейками* (*s-ячейками*). Структура ячеек в окрестности особой точки определяется ее типом и довольно универсальна. Положения и размеры *u-ячеек* четырех типов изображены на рис. 11. Здесь запись $O(1/n^\alpha)$ означает величину в пределах от const_1/n^α до const_2/n^α , значения констант зависят от Q (ячейки пронумерованы естественно, в порядке приближения к особой точке). Соответствующие рисунки для *u-ячеек* типов $SV_{\text{чист}}$ и $SV_{\text{см}}$ можно получить, разрезав рисунки для типов $S_{\text{чист}}$ и $S_{\text{см}}$ вертикальной линией, проходящей через особую точку (эта линия соответствует компоненте V_0). Положения и размеры *s-ячеек* аналогичны с точностью до зеркальной симметрии.

Отметим, что условие Б теоремы 1.1 не нарушается в случае бесконечного горизонта, так как через каждую особую точку проходит всего две компоненты $R_{0,1}(R_{-1,0})$.

Из определения ячеек следует

Л е м м а 4.1. Любая u -ячейка (s -ячейка) с номером n преобразуется под действием $T^{-1}(T)$ в s -ячейку (u -ячейку) с номером от $\text{const}_1 n$ до $\text{const}_2 n$ в окрестности некоторой s -особой (u -особой) точки (тип ячейки может при этом измениться).

4.2. Газ Лоренца. Рассмотрим один случай бильярда с бесконечным горизонтом, когда все особые точки имеют тип $S_{\text{чист}}$ (т. е. лежат в регулярных точках ∂Q). Насколько нам известно, во всех работах по исследованию

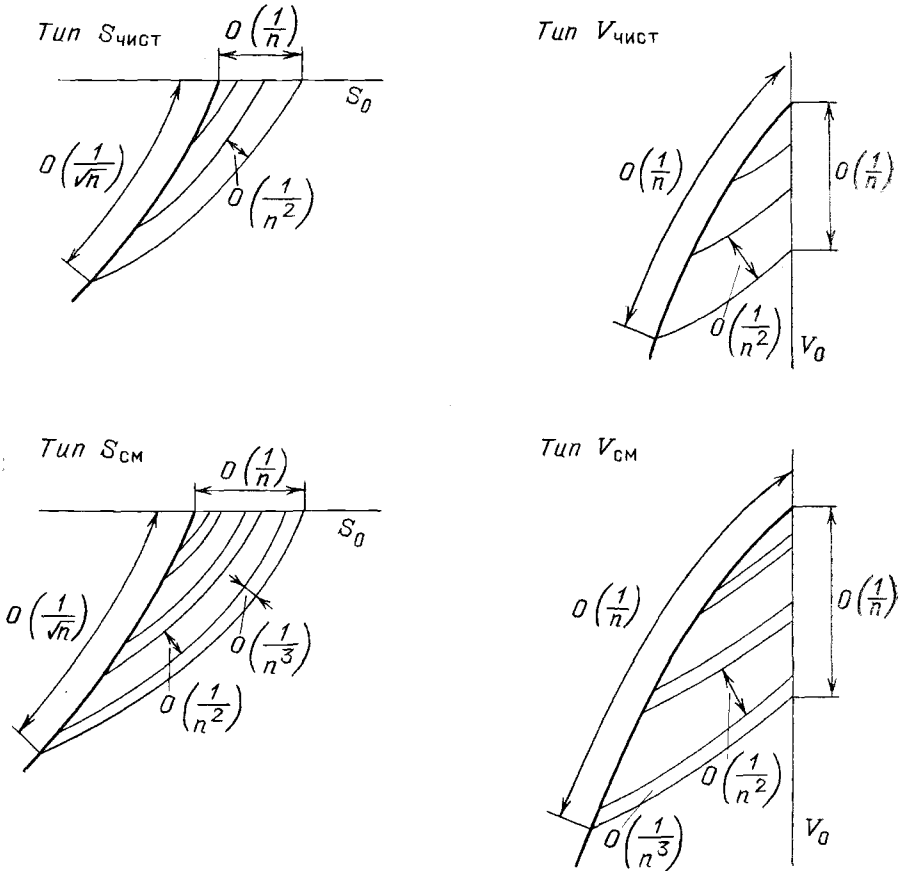


Рис. 11

эргодических свойств рассеивающих бильярдов авторы ограничиваются этим случаем [6, 21, 25]. Сюда относится популярная в статистической механике модель Лоренца [6].

В рассматриваемом случае все u -особые точки совпадают с s -особыми и наоборот. Поэтому в окрестности каждой особой точки z имеется последовательность u -ячеек $A_n^u(z)$ и s -ячеек $A_n^s(z)$ (рис. 12). Ячейка $A_n^u(z)$ ($A_n^s(z)$) пересекается с ячейками $A_i^s(z)$ ($A_i^u(z)$) при всех $\text{const}_1 \sqrt{n} \leq i \leq \text{const}_2 n^2$. Отсюда и из леммы 4.1 вытекает, что при всех $n \geq \text{const}$ s -ячейка $A_n^s(z)$ пересекает u -ячейку $TA_n^s(z')$ для некоторой особой точки $z' \neq z$ так, что их пересечение образует четырехугольник, ограниченный длинными сторонами ячеек $A_n^s(z)$ и $TA_n^s(z')$ (см. заштрихованную область на рис. 12). Число особых точек конечно, поэтому для любого $k \geq 1$ найдется (единственная) последовательность z_1, \dots, z_k из особых точек такая, что множество $\Delta_{n,k}^s(z) = A_n^s(z) \cap TA_n^s(z_1) \cap \dots \cap T^k A_n^s(z_k)$ непусто и представляет

собой узкую полосу, соединяющую две длинные стороны ячейки $A_n^s(z)$ (зачерпнутая область на рис. 12). Пределом таких полосок при $k \rightarrow \infty$ является ЛНМ, соединяющий две длинные стороны $A_n^s(z)$ (см. лемму 2.11). Этот ЛНМ мы обозначим $\gamma_n^u(z)$. Аналогично можно построить ЛУМ $\gamma_n^s(z)$, соединяющий две длинные стороны u -ячейки $A_n^u(z)$. Построенная система ЛНМ (ЛУМ) полуинвариантна:

$$(4.1) \quad T^{-1}\gamma_n^u(z) \subset \gamma_n^u(z') \quad (T\gamma_n^s(z) \subset \gamma_n^s(z'))$$

для некоторой особой точки $z' \neq z$. Соотношение (4.1) вытекает из того, что образы $T^{-l}\gamma_n^u(z)$ ($T^l\gamma_n^s(z)$) при всех $l \geq 0$ лежат в s -ячейках (u -ячейках) с постоянным номером n .

Перейдем к построению предмарковского разбиения для рассматриваемого случая. Обозначим $V(\varepsilon_*)$ объединение ε_* -окрестностей всех особых точек $\{z\}$. Величину ε_* выберем настолько малой, что коэффициент растяжения любой возрастающей (убывающей) кривой $\gamma \subset V(\varepsilon_*)$ под действием T (T^{-1}) не меньше некоторого Λ_* . Используя лемму 2.2, легко показать, что для любого $\Lambda_* > 1$ такое $\varepsilon_* > 0$ найдется. Осталось выбрать Λ_* , что мы сделаем позже.

В множестве $M_1 \setminus V(\varepsilon_*)$ лежит лишь конечное число гладких компонент множества $R_{-m, m}$ для любого $m \geq 1$. Поэтому при достаточно малых $\varepsilon < \varepsilon_0(m, \varepsilon_*)$ в нем можно построить систему кривых Γ_0^\pm , удовлетворяющих всем условиям предложения 3.1, кроме г), с тем же значением λ_1 . Условие г) будет выполнено только для кривых, целиком лежащих в $M_1 \setminus V(\varepsilon_*)$. Величину m , как и ε_* , мы пока не фиксируем.

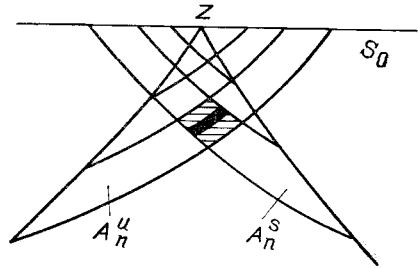


Рис. 12

Распространим конструкцию кривых Γ_0^\pm в область $V(\varepsilon_*)$. Положим $N_* = (\bar{c}\varepsilon)^{-1/2}$, где \bar{c} — малая постоянная, не зависящая от Λ_* и ε_* , значение которой выберем ниже. Выделим построенные выше ЛНМ $\gamma_n^u(z)$ и ЛУМ $\gamma_n^s(z)$ при всех $\text{const} \leq n \leq N_*$ и всех z и добавим к ним их образы $T\gamma_n^u(z)$ и $T^{-1}\gamma_n^s(z)$. Полученную систему ЛНМ (ЛУМ) обозначим Γ_*^+ (Γ_*^-). Она обладает следующими свойствами:

- а) полуинвариантность: для каждого $\gamma \in \Gamma_*^\pm$ найдется $\gamma_1 \in \Gamma_*^\pm$ такая, что $T^{\mp 1}\gamma \subset \gamma_1$;
- б) в каждой u -ячейке $A_n^u(z)$ (s -ячейке $A_n^s(z)$) при всех z и $\text{const} \leq n \leq \text{const } N_*$ найдется $\gamma \in \Gamma_*^+$ ($\gamma \in \Gamma_*^-$), соединяющий две короткие (!) стороны $A_n^u(z)$ ($A_n^s(z)$).

Построенные ЛНМ и ЛУМ назовем *опорными*.

В множестве $V(\varepsilon_*) \setminus \mathcal{O}_{2\varepsilon, 1}^+(V(\varepsilon_*) \setminus \mathcal{O}_{2\varepsilon, 1}^-)$ выберем конечную $c_1\varepsilon$ -сеть $\{x_i^+\}$ ($\{x_i^-\}$), где $c_1 = \min\{1, \kappa_{\min}\}/2$. Как и в доказательстве предложения 3.1, через каждую точку x_i^+ (x_i^-) проведем 1-возрастающую (1-убывающую) кривую $\hat{\gamma}_i^\pm$ ($\hat{\gamma}_i^-$), которую точка x_i^+ (x_i^-) делит на два отрезка p -длины ε . Отметим на концах кривой $\hat{\gamma}_i^\pm$ точки $\hat{a}_i^\pm, \hat{b}_i^\pm, \hat{a}_{i,1}^\pm, \hat{b}_{i,1}^\pm$ так, как в доказательстве предложения 3.1. Если отрезок $\hat{\gamma}_i^\pm(\hat{a}_i^\pm, \hat{a}_{i,1}^\pm)$ пересек некоторый опорный ЛУМ (ЛНМ) γ в точке, делящей γ на два отрезка p -длины не менее $\bar{c}\varepsilon$, то отметим точку их пересечения a_i^\pm . Если же указанного ЛУМ (ЛНМ) не нашлось, то, как видно из внимательного анализа структуры ячеек, в силу выбора N_* и малости \bar{c} отрезок $\hat{\gamma}_i^\pm(\hat{a}_i^\pm, \hat{a}_{i,1}^\pm)$ пересекает не более K_1 компо-

нент множества $R_{-1}(R_1)$, где $K_1 = K_1(\bar{c}) < \infty$ — постоянная. В этом случае в окрестности отрезка $\hat{\gamma}_i^\pm(\hat{a}_i^\pm, \hat{a}_{i,1}^\pm)$ построим «петлю» из трех дополнительных кривых таким же образом, как и в доказательстве предложения 3.1. Аналогичные построения выполним для отрезка $\hat{\gamma}_i^\pm(\hat{b}_i^\pm, \hat{b}_{i,1}^\pm)$.

Зафиксируем значение \bar{c} таким, чтобы величина $K_1(\bar{c})$ была конечной. Результаты построений суммируются в следующей лемме:

Л е м м а 4.2. *В множестве $V(\varepsilon_*)$ можно найти конечную систему 1-возрастающих (1-убывающих) кривых Γ_{00}^+ (Γ_{00}^-) такую, что*

- а) p -длины кривых из Γ_{00}^\pm заключены в пределах от $\lambda_2\varepsilon$ до $\lambda_2^{-1}\varepsilon$;
- б) кривые из Γ_{00}^+ (Γ_{00}^-) лежат вне $\mathcal{O}_{\lambda_2\varepsilon, 1}^+$ ($\mathcal{O}_{\lambda_2\varepsilon, 1}^-$);
- в) концы каждой кривой из Γ_{00}^+ (Γ_{00}^-) лежат на каких-то двух кривых из $\Gamma_{00}^- \cup \Gamma_*^+$ ($\Gamma_{00}^+ \cup \Gamma_*^-$), причем кривые из Γ_*^+ (Γ_*^-) делятся упомянутыми концами на два отрезка p -длины не менее $\lambda_2\varepsilon$;
- г) любая 1-возрастающая (1-убывающая) кривая $\gamma_0 \subset V(\varepsilon_*)$ p -длины $\lambda_2^{-1}\varepsilon$ пересекает хотя бы одну из кривых $\gamma \in \Gamma_{00}^- \cup \Gamma_*^+$ ($\gamma \in \Gamma_{00}^+ \cup \Gamma_*^-$) таким образом, что точка пересечения делит кривую γ на два отрезка p -длины не менее $\lambda_2\varepsilon$.

Здесь $\lambda_2 \in (0, 1)$ — постоянная, определяемая величиной $K_1 = K_1(\bar{c})$.

Утверждение г) доказывается так же, как и в предложении 3.1. Отметим, что величины \bar{c} , K_1 , λ_2 не зависят от выбора ε_* и Λ_* . Положим $\lambda_3 = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Наконец, зафиксируем величины m и Λ_* (а значит, и ε_*) таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\min\{\Lambda_m, \Lambda_*\} \geq (\varepsilon\lambda_3^2)^{-1}$, где $\varepsilon = \lambda_3/200$ (сравните с п. 3.2). Теперь наша конструкция определена полностью.

Положим $\tilde{\Gamma}_0^\pm = \Gamma_0^\pm \cup \Gamma_{00}^\pm \cup \Gamma_*^\pm$. Заменим каждый опорный ЛНМ $\gamma \in \Gamma_*^+$ (ЛУМ $\gamma \in \Gamma_*^-$) на максимальный подотрезок $\tilde{\gamma} \subset \gamma$ в нем, оканчивающийся на двух кривых из $\tilde{\Gamma}_0^+$ ($\tilde{\Gamma}_0^-$). После этого система кривых $\tilde{\Gamma}_0^\pm$ становится согласованной (см. п. 2.5), и вместе с компонентами $R_{-m, m}$ она порождает начальное разбиение ξ_0 для рассматриваемого класса биллиардов.

В построении предмарковского разбиения ξ требуется дифференцированный подход к различным компонентам границы $\partial\xi_0$. К кривым $\gamma \in \Gamma_0^\pm$ применяется отображение $T^{\mp m}$, как и в п. 3.2. К кривым $\gamma \in \Gamma_{00}^\pm$ применяется отображение $T^{\mp 1}$. Все построения из п. 3.2 применимы к этим кривым в силу выбора Λ_* . Опорные ЛУМ и ЛНМ включаются в границу предмарковского разбиения без изменений с точностью до выбора их концов, как описано выше.

В результате получим согласованную систему ЛНМ и ЛУМ, порождающую вместе с $R_{-m, m}$ предмарковское разбиение ξ . Кроме того, для нее выполнено утверждение леммы 3.4, но с заменой λ_1 на λ_3 .

Построения предмарковского разбиения ξ_1 из п. 3.3 и разбиений ξ_n из п. 3.4 переносятся на рассматриваемый случай без изменений. Отметим лишь, что разбиение ξ_1 счетное, но для любого $\delta > 0$ множество $M_1 \setminus \setminus V(\delta)$ содержит конечное число его элементов. Кроме того, в $\partial\xi_1$ входит конечное число ЛНМ и ЛУМ.

4.3. В ряде случаев, подобных описанному выше, происходит наложение u -ячеек и s -ячеек друг на друга в окрестности особой точки. Это возможно для точек u - и s -типов $S_{\text{см}}$, $SV_{\text{см}}$, $SV_{\text{чист}}$. Во всех этих случаях построение предмарковского разбиения можно провести по описанной в п. 4.2 схеме с незначительными изменениями. Единственное отличие должно состоять в несколько более аккуратном построении опорных ЛНМ и ЛУМ. Детальный анализ этих случаев не содержит новых идей и мы его опускаем. Подчеркнем лишь, что наша конструкция основывается на двух свойствах системы: сильной гиперболичности в окрестностях особых точек (коэффициент растяжения и сжатия за один шаг становится сколь угодно большим!)

и наложении u -ячеек на s -ячейки, позволяющем построить опорные ЛНМ и ЛУМ.

4.4. «Блуждающие» ячейки. Существуют особые точки качественно иных типов: $V_{\text{чист}}$ и $V_{\text{см}}$. В окрестностях этих точек u - и s -ячейки не накладываются друг на друга. Образы u -особых (s -особых) точек этих типов под действием T^m (T^{-m}) при $m \geq 1$ уже не являются особыми — они «блуждают»

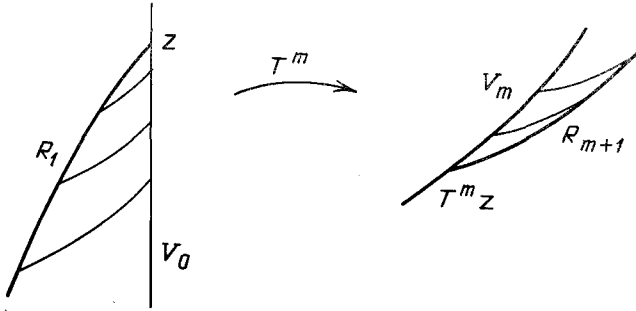


Рис. 13

где-то внутри M_1 . В их окрестностях также накапливается бесконечное число компонент множества R_{m+1} (R_{-m-1}) (рис. 13), что усложняет конструкцию.

Построить опорные ЛНМ и ЛУМ в ячейках этих типов не удастся. Взамен мы построим в каждой из них специальную цепочку возрастающих и убывающих кривых.

Прежде всего зафиксируем m таким же, как и в § 3 и положим $m_1 = m + m_0$. Тогда найдется $n_0 = n_0(m)$ такое, что во всех u -ячейках $A_n^u(z)$ (s -ячейках $A_n^s(z)$) рассматриваемого типа с номерами $n \geq n_0$ отображения $T^{\pm 2m_1}$ непрерывны. Кроме того, пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр: $\varepsilon < \varepsilon_0(m)$, как и в § 3.

Пусть $A_n^u(z)$ — произвольная u -ячейка с номером $n_0 \leq n \leq (\bar{c}\varepsilon)^{-1}$, где \bar{c} — достаточно малая постоянная, выбираемая ниже. Построим цепочку $2m_1$ -возрастающих и $2m_1$ -убывающих кривых в $A_n^u(z)$, как показано на рис. 14, чтобы они удовлетворяли условиям:

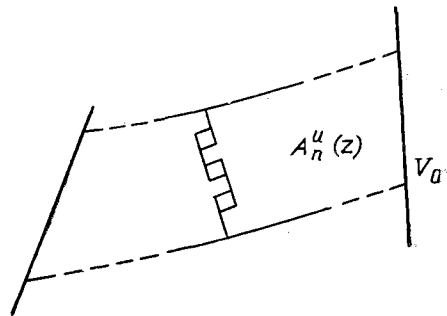


Рис. 14

а) эта цепочка соединяет две длинные стороны ячейки $A_n^u(z)$;

б) все концы возрастающих (убывающих) кривых этой цепочки (кроме двух крайних концов, принадлежащих $\partial A_n^u(z)$), лежат на убывающих (возрастающих) кривых этой же цепочки;

в) p -длины всех кривых цепочки не превышают $\lambda_1^{-1}\varepsilon$; если же цепочка состоит более чем из одной убывающей кривой, то p -длины всех кривых цепочки должны быть больше $\lambda_1\varepsilon$;

г) любая m_0 -возрастающая кривая, соединяющая две короткие стороны u -ячейки $A_n^u(z)$, пересекает хотя бы одну из убывающих кривых γ построенной цепочки таким образом, что если γ не оканчивается на $\partial A_n^u(z)$, то точка пересечения делит γ на два отрезка p -длины не менее $\lambda_1\varepsilon$.

Здесь λ_1 то же, что и в § 3.

Аналогичные цепочки построим во всех s -ячейках $A_n^s(z)$, $n_0 \leq n \leq (\bar{c}\varepsilon)^{-1}$ (при этом в формулировках условий а) — г) монотонность каждой

кривой меняется на противоположную). Кривые построенных цепочек и все их образы под действием T^j , $|j| \leq m$, также назовем *опорными*. Следствием наших построений является

Л е м м а 4.3. Пусть $\Lambda > 0$, а величины $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\Lambda) > 0$ и $\epsilon < \epsilon_0(m, \Lambda)$ достаточно малы. Тогда произвольная m_0 -возрастающая (m_0 -убывающая) кривая r -длины менее $\Lambda\epsilon$, пересекающая более чем $K_0 + 3$ компоненты множества $R_{-m, 0}$ ($R_{0, m}$), пересекает хотя бы одну убывающую (возрастающую) опорную кривую γ таким образом, что точка пересечения делит γ на два отрезка r -длины не менее $\lambda_1\epsilon$.

Дальнейшее построение начального разбиения проводится по аналогии с описанным в п. 3.1: строится конечный набор m_1 -возрастающих (m_1 -убывающих) кривых Γ_0^\pm , которые вместе с опорными кривыми и компонентами $R_{-m, m}$ образуют согласованную систему, удовлетворяющую требованиям а) — г) предложения 3.1. При доказательстве в) и г) используется лемма 4.3, в которой полагается $\Lambda = \lambda_1^{-1}$ (и тем самым фиксируется величина $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\lambda_1^{-1})$).

Построение предмарковского разбиения ξ происходит так же, как и в п. 3.2 с одним лишь отличием: отображения T^m (T^{-m}) применяются не к каждой опорной убывающей (возрастающей) кривой, а только к тем, которые лежат в $T^j A_n^u(z)$ и $T^j A_n^s(z)$ при $0 \leq j \leq m$ ($-m \leq j \leq 0$). Длины таких кривых не превышают $\lambda_1^{-1}\epsilon$. Остальные же опорные кривые определяются как образы указанных выше под действием T^j , $|j| \leq m$. Кроме того, необходимо, как и в п. 4.2, заменить возрастающие (убывающие) опорные кривые на их максимальные подотрезки, оканчивающиеся на двух убывающих (возрастающих) опорных кривых или на кривых из Γ_0^\pm , после чего полученная система кривых становится согласованной.

Построения п. п. 3.3 и 3.4 переносятся на рассматриваемый случай без изменений.

Отметим, что как в п. п. 4.2, 4.3, предмарковское разбиение ξ_1 счетно, но $d\xi_1$ содержит лишь конечное число ЛНМ и ЛУМ.

§ 5. Переход от предмарковского разбиения к марковскому

5.1. В § 3 отмечалось, что в гладких двумерных системах предмарковские разбиения являются одновременно марковскими. В разрывных системах это не так, поскольку элементы предмарковского разбиения не являются параллелограммами. Для получения марковского разбиения требуется дополнительное построение, состоящее в измельчении предмарковского разбиения ξ_1 в окрестностях кривых разрыва, поскольку именно здесь концентрируются ЛНМ и ЛУМ малой длины. Впервые такая конструкция была предложена в [18]. В [26] предпринималась попытка ее упрощения (к сожалению, также содержащая ряд неточностей). Ниже приводится переработанный и формализованный вариант этой конструкции.

Мы построим возрастающую последовательность регулярных разбиений $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots$ пространства M_1 , сходящуюся (mod 0) к искомому разбиению η при $n \rightarrow \infty$. Разбиение η_n , $n \geq 2$, строится рекуррентно, путем измельчения разбиения η_{n-1} в окрестностях кривых разрыва R_{-k_n, k_n} ($k_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$). Соответствующие окрестности будут называться *ожерельями*. Их толщина и мера убывают с ростом n достаточно быстро.

5.2. Перейдем к строгим формулировкам. Обозначим D_n^0 , $n \geq 1$, объединение всех элементов разбиения ξ_n (п. 3.4), граница которых пересекается с $R_{-m, m}$. Очевидно, $D_1^0 \supseteq D_2^0 \supseteq \dots$ и $\bigcap_n D_n^0 = R_{-m, m}$. Множество D_n^0 , $n \geq 1$ является замкнутой окрестностью $R_{-m, m}$.

Зададим рекуррентно целочисленную последовательность k_n : $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ и $k_n = 2k_{n-1} - 1$ при $n \geq 3$ (ее общая формула $k_n = 2^{n-2} + 1$ при $n \geq 2$). Обозначим $\xi_{k_n}^0$, $n \geq 1$, регулярное разбиение, совпадающее с ξ_{k_n} на множестве $D_{k_{n-1}}^0$ и содержащее его дополнение $M_1 \setminus \text{int } D_{k_{n-1}}^0$ в качестве одного своего элемента. Положим $\xi_{k_n}^k = T_1^k \xi_{k_n}^0$ при $n \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определим рекуррентно последовательность регулярных разбиений η_n : $\eta_1 = \xi_1$ и

$$(5.1) \quad \eta_n = \eta_{n-1} \vee \left(\bigvee_{|k| \leq k_{n-1}} \xi_{k_n}^k \right)$$

при $n \geq 2$. Очевидно, что она неубывающая: $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \dots$.

Обозначим $D_{k_n}^k = T_1^k D_{k_n}^0$ и $E_{k_n}^k = M_1 \setminus \text{int } D_{k_n}^k$ при всех $n \geq 1$, $|k| \leq k_{n+1} - 1$. В силу предмарковости разбиений ξ_{k_n} множества $D_{k_n}^k$ и $E_{k_n}^k$ состоят из элементов разбиения η_{n+1} . Введем ряд обозначений:

$$D_{k_n}(k, l) = D_{k_n}^k \cup D_{k_n}^{k+1} \cup \dots \cup D_{k_n}^l \text{ при } k < l;$$

$$D_{k_n}^+ = D_{k_n}(0, k_{n+1} - 1); \quad D_{k_n}^- = D_{k_n}(-k_{n+1} + 1, 0); \quad D_{k_n} = D_{k_n}^+ \cup D_{k_n}^-.$$

Множества D_{k_n} будем называть ожерельями.

Согласно (5.1) любой элемент разбиения η_n является пересечением конечного числа элементов разбиений ξ_1 и $\xi_{k_t}^k$ при $|k| \leq k_t - 1$, $1 \leq t \leq n$. Разделим все элементы названных разбиений на два класса:

1-й класс включает все элементы разбиения ξ_1 и элементы разбиений $\xi_{k_t}^k$, лежащие в ожерелье $D_{k_{t-1}}$;

2-й класс состоит из всех элементов $E_{k_t}^k$, $|k| \leq k_{t+1} - 1$.

Легко видеть, что 1-й класс содержит связные элементы малого диаметра. Напротив, во 2-й класс входят несвязные элементы, каждый из которых заполняет «почти все» пространство M_1 , за исключением узких окрестностей кривых разрыва.

Л е м м а 5.1. D_{k_n} является замкнутой окрестностью множества $R_{-k_{n+1}m, k_{n+1}m}$; $D_{k_n}^+$ и $D_{k_n}^-$ являются замкнутыми окрестностями множеств $R_{0, k_{n+1}m}$ и $R_{-k_{n+1}m, 0}$, соответственно.

Лемма выводится из конструкции множеств $R_{k,l}$ поскольку $D_{k_n}^0$ — замкнутая окрестность $R_{-m, m}$ при всех $n \geq 1$.

5.3. Введем понятие ранга кривых, образующих границу $\partial \xi_n$, $n \geq 1$. Ранги всех гладких кривых, лежащих в $\partial \xi_1$, положим равными 1. Для каждого $n \geq 2$ ранги гладких кривых, лежащих в $\partial \xi_n \setminus \partial \xi_{n-1}$ положим равными n . Ранг кривой γ обозначим $\text{rank } \gamma$.

Из предмарковости разбиений ξ_n вытекают следующие правила подсчета рангов возрастающих кривых:

- а) если $\text{rank } \gamma > 1$, то $\text{rank } T_1^{\pm 1} \gamma = \text{rank } \gamma \pm 1$;
- б) если $\text{rank } \gamma = 1$, то $\text{rank } T_1^{-1} \gamma = 1$.

Аналогичные правила (с заменой T_1 на T_1^{-1} и наоборот) справедливы для убывающих кривых.

Л е м м а 5.2. Граница $\partial^n D_{k_n}^{-k}$ ($\partial^n D_{k_n}^k$) при всех $k_n \leq k \leq k_{n+1} - 1$, $n \geq 1$, состоит из кривых ранга 1.

Доказательство проводится непосредственным подсчетом рангов.

Можно показать, что разбиение η_n предмарковское при всех $n \geq 1$, но нам это не понадобится.

5.4. Введем несколько понятий для описания геометрической формы элементов разбиений η_n . Односвязную замкнутую область $A \subset M_1$ назовем *многоугольником*, если $A = \mathcal{F}(A)$ и ∂A состоит из конечного числа ЛНМ, ЛУМ и кривых разрыва, причем все внутренние углы, образованные пересечением гладких компонент ∂A различной монотонности, не превышают 180° . Назовем *стороной* многоугольника A максимальную непрерывную (не обязательно гладкую) монотонную или нейтральную кривую $\gamma \subset \partial A$. Ясно, что каждая сторона состоит либо из цепочки кривых одной монотонности, либо из одного нейтрального отрезка. Соответственно, будем различать *возрастающие*, *убывающие* и *нейтральные* стороны многоугольников. Любой многоугольник имеет не более двух возрастающих и двух убывающих сторон, что можно доказать с помощью подсчета угла вращения при полном обходе границы ∂A .

Многоугольники, имеющие ровно две возрастающие и две убывающие стороны (независимо от числа нейтральных), назовем *полными*.

З а м е ч а н и е 5.3. Для любого многоугольника A и точки $x \in A$ множества $\gamma_A^u(x)$ и $\gamma_A^s(x)$ связны. Концы кривой $\gamma_A^u(x)$ ($\gamma_A^s(x)$), либо совпадают с «естественными» концами ЛНМ $\gamma^u(x)$ (ЛУМ $\gamma^s(x)$), либо лежат на убывающих (возрастающих) сторонах A .

З а м е ч а н и е 5.4. Пусть A — полный многоугольник. Предположим, что ЛНМ γ^u пересекает обе убывающие стороны A , а ЛУМ γ^s пересекает обе возрастающие стороны A . Тогда точка $x = \gamma^u \cap \gamma^s$ существует и лежит в A .

В дальнейшем будем рассматривать только многоугольники, удовлетворяющие двум дополнительным условиям R_1 и R_2 .

У с л о в и е R_1 . Каждая гладкая компонента границы многоугольника лежит в $\partial \xi_n$ при некотором $n \geq 1$.

Соответственно, компоненты границ многоугольников обладают рангами. Обозначим $\text{rank}^+ A$ ($\text{rank}^- A$) максимальный ранг возрастающих (убывающих) компонент ∂A .

У с л о в и е R_2 . Внутри многоугольника A нет возрастающих (убывающих) кривых, ранги которых не превышают $\text{rank}^+ A$ ($\text{rank}^- A$).

Нетрудно показать, что если пересечение нескольких многоугольников имеет непустую внутренность, то оно также является многоугольником и

$$(5.2) \quad \text{rank}^\pm(A_1 \cap \dots \cap A_k) = \max_{1 \leq i \leq k} \{\text{rank}^\pm A_i\}.$$

В п. 3.4 мы фактически показали, что все элементы разбиений ξ_n , $n \geq 1$, являются многоугольниками (в частности, они удовлетворяют условиям R_1 и R_2). Отсюда следует, что все элементы 1-го класса (определенные в п. 5.2), являются многоугольниками.

5.5. Покажем, что ожерелья D_{k_n} образуют (mod 0) не более чем конечнократное покрытие в пространстве M_1 . Наш вариант этого утверждения более точен, чем соответствующие леммы в [18, 26].

Л е м м а 5.5. *Каждая точка $x \in M_2^+$ ($x \in M_2^-$) принадлежит лишь конечному числу множеств $D_{k_n}^+$ ($D_{k_n}^-$), $n \geq 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in D_{k_n}^+$. Тогда $T_1^{-k}x \in D_{k_n}^0$ при некотором $0 \leq k \leq k_{n+1} - 1$. Обозначим Δ элемент разбиения $\xi_{k_n}^0$, содержащий точку $T_1^{-k}x$. Он граничит с $R_{-m, m}$, поэтому при некотором $|l| \leq m$ многоугольник $\Delta_1 = T^l \Delta$ граничит с $R_{0,1}$ (подчеркнем, что здесь фигурирует исходный автоморфизм T , а не T_1). Обозначим $x_1 = T^{-k+m+l}x$, $x_1 \in \Delta_1$.

Покажем, что многоугольник Δ_1 лежит в достаточно малой окрестности $R_{0,1}$. Легко видеть, что отображения T^{j_1} и T^{-j_2} непрерывны на $\text{int } \Delta_1$ при $j_1 = (k_n - 1)m - l$ и $j_2 = (k_n - 1)m + l$. Пусть γ — произвольная возрастающая (убывающая) кривая, лежащая внутри Δ_1 . Тогда $\gamma' = T^{j_1}\gamma$ ($\gamma' =$

$= T^{-j_2\gamma}$) является j_1 -возрастающей (j_2 -убывающей). Кривая γ' не пересекает убывающих (возрастающих) компонент границы $\partial\xi_1$ согласно выбору Δ . В силу леммы 3.4 имеем $p(\gamma') \leq \lambda_3^{-1}\varepsilon$ (в случае конечного горизонта следует заменить λ_3 на λ_1 (см. § 3)). Отсюда $p(\gamma) \leq \varepsilon'$, где $\varepsilon' = \lambda_3^{-1}\varepsilon\Lambda_0^{-\lfloor j/m \rfloor}$ и $j = \min\{j_1, j_2\} = (k_n - 1)m - |l|$. Аналогичные оценки верны для p -длины всех возрастающих (убывающих) кривых, лежащих внутри многоугольника $T^{-1}\Delta_1$, граничащего с $R_{-1,0}$. Отсюда нетрудно вывести, что $d^+(x_1) \leq \leq \text{const}(Q)\varepsilon'$, или, иначе

$$(5.3) \quad d^+(T^{-km+l}x) \leq \text{const}(Q)\varepsilon\Lambda_0^{-\lfloor \frac{(k_n-1)m-|l|}{m} \rfloor}$$

(напомним, что $0 \leq k \leq k_{n+1} - 1$). Если $x \in M_2^+$, то последнее неравенство может выполняться только для конечного набора значений n . Аналогичные рассуждения справедливы для $x \in M_2^-$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Из оценок (5.3) и (2.6) можно также вывести оценку меры $D_{k_n}^0$, приведенную в [18, 26] без доказательства:

$$(5.4) \quad v(D_{k_n}^0) \leq c\varepsilon\alpha^{m(k_n-2)}$$

для всех $n \geq 2$ (здесь $c > 0$ и $\alpha < 1$ — некоторые постоянные для Q).

Для каждой точки $x \in M_1$ положим $N_x = \max\{n: x \in D_{k_{n-1}}\}$. Если $x \notin D_{k_n}$ при всех $n \geq 1$, то положим $N_x = 1$. Лемма 5.5 показывает, что $N_x < \infty$ для всех точек $x \in M_2$.

5.6. Рассмотрим подробнее геометрическую структуру элементов разбиений η_n , $n \geq 2$. Нас будут интересовать только такие $\Delta \in \eta_n$, которые не лежат в ожерелье $D_{k_{n-1}}$. Назовем их *правильными элементами*. Для каждого правильного элемента $\Delta \in \eta_n$ положим $N_\Delta = \max\{t \leq n: \Delta \subset \subset D_{k_{t-1}}\}$. Если $\Delta \not\subset D_{k_t}$ при всех $t \leq n - 1$, то положим $N_\Delta = 1$. Таким образом, $1 \leq N_\Delta \leq n - 1$.

Зафиксируем $n \geq 2$ и правильный элемент Δ разбиения η_n . Согласно (5.1) можно записать

$$(5.5) \quad \Delta = \mathcal{F}(G'_1 \cap G'_2 \cap \dots \cap G'_{p_1} \cap G''_1 \cap G''_2 \cap \dots \cap G''_{p_2}),$$

где G'_i означают элементы 1-го класса и G''_i означают элементы 2-го класса. Из результатов п. 5.4 следует, что множество $G_\Delta^0 = \mathcal{F}(G'_1 \cap G'_2 \cap \dots \cap G'_{p_1})$ является многоугольником.

Л е м м а 5.6. $\text{rank}^\pm G_\Delta^0 \leq k_{N_\Delta+1}$.

Для доказательства заметим, что элементы $G'_1, G'_2, \dots, G'_{p_1}$ входят в разбиения ξ_1 и $\xi_{k_t}^k$ при некоторых $|k| \leq k_t - 1$ и $t \leq N_\Delta$. Далее следует оценить ранги этих элементов по правилам а), б) и применить соотношение (5.2).

Выделим среди элементов 2-го класса G''_1, \dots, G''_{p_2} две группы элементов: в первую группу включим такие $E_{k_t}^k$, что $k_t \leq k < k_{t+1}$ и во вторую — такие $E_{k_t}^k$, что $-k_{t+1} < k \leq -k_t$. Пересечение выделенных элементов первой группы обозначим G_Δ^+ , а второй G_Δ^- .

Л е м м а 5.7. $\Delta = \mathcal{F}(G_\Delta^0 \cap G_\Delta^+ \cap G_\Delta^-)$.

Для доказательства рассмотрим произвольный «невыделенный» элемент $G''_{i_0} = E_{k_t}^k$. Тогда у него $|k| \leq k_t - 1$ и $t \leq n - 1$. Согласно построению из п. 5.2 множество $D_{k_{t-1}}^0 \setminus D_{k_t}^0$ является объединением элементов 1-го класса разбиения $\xi_{k_t}^0$. Поэтому множество $G''_{i_0} = E_{k_t}^k$ является

объединением элемента $E_{k_{t-1}}^k$ и нескольких элементов 1-го класса разбиения $\xi_{k_t}^k$. Обозначим \hat{G}'' тот из [названных элементов, который содержит Δ . Ясно, что $\hat{G}'' \subseteq G_{i_0}''$ и, кроме того, элемент \hat{G}'' сам входит в разложение (5.5). Отсюда вытекает утверждение леммы.

Обозначим $G_{\Delta}^{+0} = \mathcal{F}(G_{\Delta}^+ \cap G_{\Delta}^0)$ и $G_{\Delta}^{-0} = \mathcal{F}(G_{\Delta}^- \cap G_{\Delta}^0)$.

Л е м м а 5.8. $\partial^s G_{\Delta}^{+0} \subseteq \partial^s G_{\Delta}^0$ и $\partial^u G_{\Delta}^{-0} \subseteq \partial^u G_{\Delta}^0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 5.2 границы $\partial^s G_{\Delta}^+$ и $\partial^u G_{\Delta}^-$ состоят из кривых ранга 1. Согласно условию R_2 эти кривые не могут лежать строго внутри многоугольника G_{Δ}^0 . Лемма доказана.

Типичный вид правильного элемента Δ изображен на рис. 15.

Отметим, что правильный элемент Δ может содержать «осколки» (типа W_1 и W_2 на рис. 15), в которых не может быть точек предельных параллелограммов $U \in \eta$. Окончательно мы избавимся от таких «осколков» ниже, в п. 5.8.

5.7. Рассмотрим разбиение пространства M_1 , получающееся из η_n при $n \rightarrow \infty$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in M_2$. Тогда при всех $n \geq N_x + 1$ найдется правильный элемент $\Delta_n(x)$ разбиения η_n , содержащий точку x .

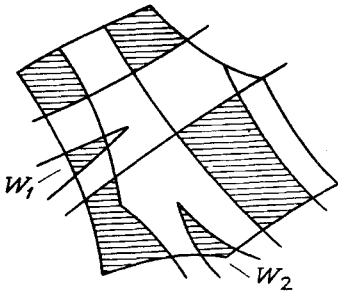


Рис. 15

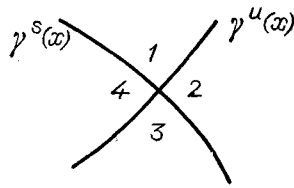


Рис. 16

Если $x \in \partial \eta_n$, то таких элементов несколько. Точнее, их не более четырех, что вытекает из следующего замечания.

З а м е ч а н и е 5.9. Для любого n множество $\Delta_n(x)$ содержит либо полную окрестность точки x , либо полуокрестность ЛНМ $\gamma^u(x)$ (ЛУМ $\gamma^s(x)$), либо внутренность одного из четырех углов между ЛНМ $\gamma^u(x)$ и ЛУМ $\gamma^s(x)$ (рис. 16).

В любом из этих случаев можно выбрать убывающую последовательность правильных элементов $\Delta_{N_x+1}(x) \supseteq \Delta_{N_x+2}(x) \supseteq \dots$. Обозначим $\Delta_{\infty}(x) = \bigcap_n \Delta_n(x)$. Очевидно, $\Delta_{\infty}(x)$ — замкнутое непустое множество (в частности, $x \in \Delta_{\infty}(x)$). Из правильности $\Delta_{N_x+1}(x)$ легко выводится, что

$$(5.6) \quad \Delta_{\infty}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\Delta_{N_x+1}(x) \setminus \bigcup_{n=N_x+1}^N D_{k_n}).$$

Множество всех элементов $\Delta_{\infty}(x)$ вида (5.6) обозначим Ω . Очевидно, Ω счетно.

Будем обозначать $\tilde{\partial}^u \eta = \bigcup_n \partial^u \eta_n$, $\tilde{\partial}^s \eta = \bigcup_n \partial^s \eta_n$ и $\tilde{\partial} \eta = \tilde{\partial}^u \eta \cup \tilde{\partial}^s \eta$. Знак \sim поставлен здесь потому, что эти множества формально не являются границей (хотя бы потому, что они плотны в M_1). Однако, $\tilde{\partial} \eta$ служит аналогом границы марковского разбиения для гладких систем [2, 9]. А именно,

если $x \in M_2 \setminus \tilde{\partial}\eta$, то x покрыто ровно одним элементом $\Delta \in \Omega$. Если же $x \in \tilde{\partial}\eta$, то таких элементов может быть несколько, но не более четырех (это показано выше).

Пусть $x \in M_2$ и $\dot{V}(x)$ — инфинитезимальная окрестность точки x . Регулярные компоненты $\tilde{\partial}\eta$, проходящие через x или оканчивающиеся в x , делят $\dot{V}(x)$ на несколько частей, которые мы назовем *характеристическими окрестностями* точки x . Любая точка $x \in M_2$ имеет не более четырех характеристических окрестностей, соответствующих описанному в замечании 5.9. Характеристические окрестности точки x будем обозначать $V(x)$. Условимся говорить, что характеристическая окрестность $V(x)$ точки $x \in M_2$ связана с элементом $\Delta \in \Omega$, если $\Delta = \Delta_\infty(x)$ и $V(x)$ входит во все «определяющие» множества $\Delta_n(x) \in \eta_n$, определяющие $\Delta_\infty(x)$ по формуле (5.6).

З а м е ч а н и е 5.10. Пусть $x \in M_2$. Каждый элемент $\Delta \in \Omega$, содержащий точку x , связан ровно с одной характеристической окрестностью $V(x)$ точки x , и наоборот.

Напомним, что граница $\partial\xi_1$ содержит конечное число ЛНМ и ЛУМ (см. §§ 3, 4). Из предмарковости ξ_1 следует, что эти ЛНМ (ЛУМ) содержат конечное число периодических (для отображения T_1) точек $x_1^u, x_2^u, \dots, x_{n_1}^u$ ($x_1^s, x_2^s, \dots, x_{n_1}^s$), к которым притягиваются указанные ЛНМ (ЛУМ) под действием T_1^{-n} (T_1^n) при $n \rightarrow \infty$. Обозначим $\Gamma^u(\eta) = \bigcup_{i=1}^{n_1} \Gamma^u(x_i^u)$ и $\Gamma^s(\eta) = \bigcup_{i=1}^{n_1} \Gamma^s(x_i^s)$ объединения ГНМ точек x_i^u и ГУМ точек x_i^s (см. п. 1.1). Из построения разбиения η вытекает, что

$$(5.7) \quad \tilde{\partial}^u \eta \subset \Gamma^u(\eta) \quad \text{и} \quad \tilde{\partial}^s \eta \subset \Gamma^s(\eta).$$

5.8. Ω образует счетное покрытие множества M_2 . Чтобы получить из него марковское разбиение, необходимо удалить из множеств $\Delta \in \Omega$ некоторые «нетипичные» точки, после чего они превратятся в параллелограммы.

Введем ряд обозначений. Для каждого $\Delta \in \Omega$ обозначим $\Delta^0 = \Delta \cap M_2$ и Δ^* — замыкание Δ^0 (очевидно, $\Delta^* \subset \Delta$). Обозначим также $\Omega^0 = \{\Delta^0\}$ и $\Omega^* = \{\Delta^*\}$. Для каждого $\Delta \in \Omega$ положим $N(\Delta) = \min \{N_x: x \in \Delta\}$ и обозначим $C_n(\Delta)$, $n \geq 1$, элемент разбиения η_n , содержащий множество Δ . Он правильный при всех $n > N(\Delta)$. В силу леммы 5.7 он допускает разложение, которое может быть записано в виде $C_n(\Delta) = \mathcal{F}(G_n^0(\Delta) \cap G_n^+(\Delta) \cap G_n^-(\Delta))$. Обозначим, как и в п. 5.6, $G_n^{\pm 0}(\Delta) = \mathcal{F}(G_n^\pm(\Delta) \cap G_n^0(\Delta))$. Ясно, что последовательности множеств $\{C_n(\Delta)\}$, $\{G_n^{\pm 0}(\Delta)\}$ при $n > N(\Delta)$ невозрастающие. Обозначим $G_\infty^{\pm 0}(\Delta) = \bigcap_n G_n^{\pm 0}(\Delta)$. Тем самым, $\Delta = G_\infty^{+0}(\Delta) \cap$

$\bigcap G_\infty^{-0}(\Delta)$. Заметим, что в силу леммы 5.6 многоугольники $G_n^0(\Delta)$ при всех $n > N(\Delta)$ совпадают. Будем обозначать соответствующий многоугольник $G^0(\Delta)$. Для точек $y \in \Delta$ обозначим $\gamma_0^u(y, \Delta) = \gamma^u(y) \cap G^0(\Delta)$ и $\gamma_0^s(y, \Delta) = \gamma^s(y) \cap G^0(\Delta)$.

Л е м м а 5.11. Пусть $\Delta^* \in \Omega^*$. Для каждой точки $y \in \Delta^*$

а) кривая $\gamma^u(y)$ ($\gamma^s(y)$) пересекает две убывающие (возрастающие) стороны многоугольника $G^0(\Delta)$ (в частности, $G^0(\Delta)$ полный);

б) $\gamma_0^u(y, \Delta) \subset G_\infty^{+0}(\Delta)$ и $\gamma_0^s(y, \Delta) \subset G_\infty^{-0}(\Delta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2.11 достаточно рассмотреть случай $y \in \Delta^0$. Тогда $y \in M_2$, и согласно лемме 2.13 концы ЛНМ $\gamma^u(y)$ лежат на двух кривых разрыва $\gamma_1, \gamma_2 \subset R_{0, \infty}$. Обозначим $\gamma_n^u(y) = \gamma^u(y) \cap G_n^+(\Delta)$ при $n > N(\Delta)$. При достаточно больших n имеем $k_n > \max \{\text{rank } \gamma_1, \text{rank } \gamma_2\}$, и в силу леммы 5.1 множество $G_n^+(\Delta)$ не пересекается с γ_1 и γ_2 . Тогда множество $\gamma_n^u(y)$ находится на положительном расстоянии от концов кривой $\gamma^u(y)$. Следовательно, все граничные точки

множества $\gamma_n^u(y)$ как подмножества кривой $\gamma^u(y)$ принадлежат $\partial^s G_n^{+0}(\Delta)$ (если бы они принадлежали $\partial^u G_n^{+0}(\Delta)$, то они лежали бы на возрастающих кривых разрыва или на других ЛНМ, что невозможно). В силу леммы 5.8 эти точки принадлежат $\partial^s G^0(\Delta)$. Отсюда вытекает, что $\gamma_n^u(\Delta)$ совпадает с $\gamma_0^u(y, \Delta)$. Тем самым, $\gamma_0^u(y, \Delta) \subset G_\infty^{+0}(\Delta)$. Аналогичные рассуждения справедливы для ЛУМ $\gamma^s(y)$. Лемма доказана.

У т в е р ж д е н и е. Для любого $\Delta \in \Omega$ множества Δ^0 и Δ^* являются параллелограммами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2.11 достаточно показать, что Δ^0 — параллелограмм. Пусть $x, y \in \Delta^0$. В силу леммы 5.11 а) и замечания 5.4 точка $z = [x, y]$ существует и лежит в $G^0(\Delta)$. Согласно лемме 5.11 б) имеем $z \in \gamma_0^u(x, \Delta) \subset G_\infty^{+0}(\Delta)$ и $z \in \gamma_0^s(y, \Delta) \subset G_\infty^{-0}(\Delta)$, поэтому $z \in G_\infty^{+0}(\Delta) \cap G_\infty^{-0}(\Delta) = \Delta$. Кроме того, $z \in M_2$, поскольку $x, y \in M_2$ (см. лемму 2.12 б)). Следовательно, $z \in \Delta^0$. Утверждение доказано.

Заметим, что $\nu(\Delta^* \setminus \Delta^0) = 0$ для любого Δ , поскольку $\Delta^* \setminus \Delta^0 \subset \Delta \setminus M_2$.

С л е д с т в и е. Замкнутые параллелограммы $\Delta^* \in \Omega^*$ образуют покрытие (mod 0) пространства M_1 . Более того, они покрывают все точки множества M_2 . Каждая точка $x \in M_2$ покрыта не более чем четырьмя параллелограммами.

Будем говорить, что характеристическая окрестность $V(x)$ точки $x \in M_2$ связана с параллелограммом $\Delta^* \in \Omega^*$, если она связана с соответствующим $\Delta \in \Omega$. Замечание 5.10 естественно распространяется и на элементы $\Delta^* \in \Omega^*$.

5.9. Докажем, что построенное покрытие Ω^* является марковским разбиением. Достаточно проверить правильность пересечения параллелограммов $U(x)$ и $T_1 U(T_1^{-1}x)$ для ν -почти каждой точки x .

У т в е р ж д е н и е 5.12. Пусть $x \in M_2$ и $\Delta_1^* \in \Omega^*$ — параллелограмм, содержащий x . Тогда найдется параллелограмм $\Delta_2^* \in \Omega^*$, содержащий точку $T_1 x$ ($T_1^{-1}x$) такой, что пересечение $\Delta_2^* \cap T_1 \Delta_1^*$ ($\Delta_1^* \cap T_1 \Delta_2^*$) правильное.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем только для точки $T_1 x$ (для точки $T_1^{-1}x$ оно проводится совершенно аналогично).

Л е м м а 5.13. Пусть $V(x)$ и $V(T_1 x)$ — характеристические окрестности точек x и $T_1 x$, соответственно. Предположим, что $V(x)$ связана с параллелограммом $\Delta_1^* \in \Omega^*$, а $V(T_1 x)$ — с параллелограммом $\Delta_2^* \in \Omega^*$. Если $T_1 V(x) \cap V(T_1 x) \neq \emptyset$, то пересечение $\Delta_2^* \cap T_1 \Delta_1^*$ правильное.

Из этой леммы немедленно вытекает требуемое утверждение, поскольку соответствующая характеристическая окрестность $V(T_1 x)$ точки $T_1 x$ всегда найдется.

Д о к а ж е м л е м м у 5.13. Достаточно показать, что $T_1 \gamma_{\Delta_1^*}^s(x) \subseteq \gamma_{\Delta_2^*}^s(T_1 x)$ и $T_1 \gamma_{\Delta_1^*}^u(x) \supseteq \gamma_{\Delta_2^*}^u(T_1 x)$. Докажем только первое из этих соотношений (доказательство второго аналогично). Будем использовать обозначения, введенные в п. 5.8 и положим $n_0 = \max\{N_x, N_{T_1 x}\}$. Вначале покажем, что

$$(5.8) \quad T_1 \gamma_0^s(x, \Delta_1) \subseteq \gamma_0^s(T_1 x, \Delta_2).$$

Очевидно, $T_1 \gamma_0^s(x, \Delta_1)$ является ЛУМ. Если (5.8) не выполнено, то внутри этого ЛУМ найдется точка y , лежащая на $\partial^u G^0(\Delta_2)$. Пусть γ — гладкая компонента $\partial^u G^0(\Delta_2)$, содержащая y . Согласно построению многоугольника $G^0(\Delta_2)$ кривая γ входит в границу некоторого элемента 1-го класса $G' \supseteq G^0(\Delta_2)$. Возможны два случая:

1-й случай: G' является элементом разбиения $\xi_{k_t}^k$ при некоторых $k \geq \geq -k_t + 2$ и $t \geq 1$. Тогда множество $T_1^{-1}G'$ также является элементом 1-го класса. Этот элемент содержит $V(x)$, а, следовательно, и многоугольник $G^0(\Delta_1)$. Тогда $T_1\gamma_0^s(x, \Delta_1) \subset G'$ и мы пришли к противоречию.

2-й случай: G' является элементом разбиений ξ_1 или $\xi_{k_t}^k$ при $k = -k_t + 1$ и $t \geq 1$. В этом случае нетрудно проверить, что $\text{rank } \gamma = 1$. Тогда кривая $T_1^{-1}\gamma \subset \partial\xi_1$. Поэтому она не может пересекать кривую $\gamma_0^s(x, \Delta_1)$ в ее внутренней точке $T_1^{-1}y$. Тем самым, (5.8) доказано.

Покажем, что

$$(5.9) \quad T_1\gamma_{\Delta_1}^s(x) \subseteq \gamma_{\Delta_2}^s(T_1x).$$

Пусть y — произвольная точка в $\gamma_{\Delta_1}^s(x)$. Согласно (5.8) ее образ $T_1y \in \in G^0(\Delta_2)$, а в силу леммы 5.11 б) он лежит в $G_\infty^-(\Delta_2)$. Поэтому достаточно показать, что $T_1y \in G_\infty^-(\Delta_2)$. Если это не так, то $T_1y \notin G_n^+(\Delta_2)$ при некотором $n > n_0$. Используя определение $G_n^+(\Delta_2)$ и (5.4), нетрудно показать, что в этом случае $y \notin G_n^+(\Delta_1)$. Получаем противоречие, которое доказывает (5.9).

Пусть, наконец, y — произвольная точка в $\gamma_{\Delta_1}^{s*}(x)$. Если $y \in M_2$, то $T_1y \in M_2$, и в силу (5.9) имеем $T_1y \in \gamma_{\Delta_2}^s(T_1x)$. Если $y \notin M_2$, то $y_i \rightarrow y$ для некоторой последовательности $y_i \in \Delta_1^0$. Легко видеть, что точки $y_i' = = [y_i, x]$ определены и лежат в Δ_1^0 . Как показано выше, $T_1y_i' \in \gamma_{\Delta_2}^{s*}(T_1x)$, поэтому $T_1y = \lim T_1y_i' \in \gamma_{\Delta_2}^{s*}(T_1x)$. Лемма 5.13 доказана.

Таким образом, марковское разбиение η для отображения T^m построено. Марковское разбиение для T можно получить согласно замечанию 1.2. Отметим, что из нашего построения вытекают два дополнительных следствия:

С л е д с т в и е. *Любая точка $x \in M_2$ обладает кодировкой $\sigma(x)$ в символической динамике (Σ_{II}, θ) (понятие кодировки и все обозначения введены в п. 1.2).*

С л е д с т в и е. *Если $x \in M_2$ и $T^kx \notin \tilde{\delta}\eta$ при всех целых k , то кодировка $\sigma(x)$ единственна.*

Для некоторых приложений существенно, чтобы для каждой отдельной точки $x \in M_1$ число различных кодировок $\sigma(x) \in \Sigma_{II}$ было равномерно ограничено. Для этих целей мы строим модифицированную символическую динамику в § 7.

§ 6. Нерассеивающие билиарды с гиперболическим поведением

Результаты данного параграфа не будут использованы в § 7. Здесь мы строим марковские разбиения для некоторых классов нерассеивающих билиардов, существенно используя материал § 4.

6.1. Полурассеивающие билиарды. Билиард в области Q называется *полурассеивающим* [14], если граница ∂Q состоит из рассеивающих и нейтральных компонент (терминологию см. в п. 1.1).

В полурассеивающих билиардах отражения от нейтральных компонент являются не более чем «мешающим фактором», поскольку они не приводят к растяжениям и сжатиям (т. е. к гиперболичности). Чтобы исключить влияние этого фактора, мы переходим к производному отображению. Обозначим ∂^+Q (∂^0Q) объединение всех рассеивающих (нейтральных) компонент ∂Q . Положим $M_1^+ = \{x: \pi(x) \in \partial^+Q\}$, $M_1^0 = \{x: \pi(x) \in \partial^0Q\}$ и рассмотрим производный автоморфизм \bar{T} построенный по T и множеству M_1^+ . Для

точек $x \in M_1$ обозначим $k(x)$ номер первого отражения траектории точки x от ∂^+Q , т. е. $\bar{T}x = \bar{T}^{k(x)}x$ для $x \in M_1^+$. Мера $dv = \text{const} \cos \varphi \, drd\varphi$ инвариантна для \bar{T} , также как и для T . Легко видеть, что на областях непрерывности отображения \bar{T} в M_1^+ функция $k(x)$ постоянна, а отображения T^i при $1 \leq i \leq k(x)$ непрерывны.

Пусть $x \in M_1^+$ и $k(x) \geq 2$. Отражения от нейтральных компонент ∂Q в точках $Tx, \dots, T^{k(x)-1}x$ можно «выпрямить», отражая саму область Q симметрично относительно соответствующих компонент ∂^0Q (рис. 17). Это показывает, что локальные свойства отображения \bar{T} такие же, как и у автоморфизма T в рассеивающих бильярдах.

Мы наложим на область Q ограничения, как и в теореме 1.1:

А'. Все внутренние углы границы ∂Q строго положительны.

Б'. Кратность всех точек $x \in M_1^+$ равномерно ограничена некоторой константой $K'_0 = K'_0(Q) < \infty$ (кратность, как и в п. 1.1, означает число кривых разрыва отображений T^n , $n \in \mathbb{Z}$, проходящих через точку x).

Из вышесказанного следует, что при условиях А' и Б' все определения и утверждения §§ 1, 2 переносятся на отображение \bar{T} без существенных изменений. Наложим на область Q дополнительное ограничение:

В'. Функция $k(x)$ равномерно ограничена на M_1^+ : $k(x) \leq \text{const}(Q) < \infty$.

При этом условии число кривых разрыва для T^n конечно при любом целом n , и отображение T обладает всеми свойствами автоморфизма T в рассеивающих бильярдах с конечным горизонтом. Следовательно, построения

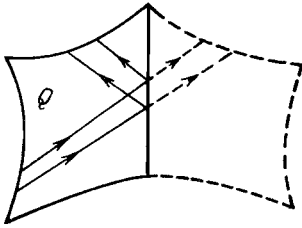


Рис. 17

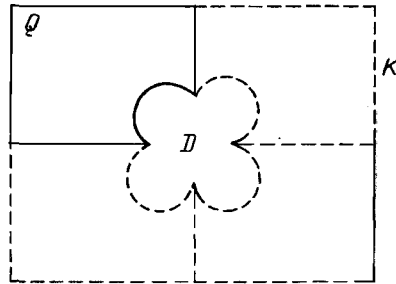


Рис. 18

§§ 3, 5 можно перенести на рассматриваемый случай. В результате мы получаем марковское разбиение $\tilde{\eta}$ пространства M_1^+ для автоморфизма T .

Для построения марковского разбиения η во всем пространстве M_1 рассмотрим произвольный элемент $\tilde{U} \in \tilde{\eta}$ ($\tilde{U} \subset M_1^+$). Найдется связная область $V \supset \tilde{U}$, на которой \bar{T} непрерывно, поэтому $k(x) \equiv \text{const}$ на \tilde{U} . Множества $\tilde{U}, T\tilde{U}, \dots, T^{k(x)-1}\tilde{U}$, где $x \in \tilde{U}$, при всевозможных $\tilde{U} \in \tilde{\eta}$ образуют марковское разбиение пространства M_1 для отображения T , что проверяется непосредственно. Тем самым доказана

Т е о р е м а 6.1. Пусть область Q полурассеивающего бильярда удовлетворяет условиям А', Б' и В'. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется марковское разбиение с элементами диаметра не более ε .

В заключение отметим, что условие В' представляется весьма стеснительным. Если оно не выполнено, то в ряде случаев справедливость теоремы 6.1 можно доказать непосредственным сведением к рассеивающему бильярду. Например, на рис. 18 область Q после трехкратного отражения относительно нейтральных компонент ∂Q заполнит прямоугольник K , из которого вырезана область D с рассеивающей границей. Биллиардные траектории в Q с помощью процедуры «распрямления» (рис. 17) переходят в биллиардные траектории на торе $\text{Tor}^2 \setminus D$ (тор Tor^2 задается фундаментальной областью, совпадающей с K). Бильярд в $\text{Tor}^2 \setminus D$ рассеивающий, и мар-

ковское разбиение для этого бильярда несложным образом преобразуется в марковское разбиение для бильярда в Q .

Описанная процедура применима, если нейтральные компоненты границы лежат на сторонах прямоугольника, правильного треугольника (или шестиугольника). Однако, в общем случае у отображения \hat{T} возникают особые точки (где функция $k(x)$ неограниченна), в окрестностях которых структура отображения \hat{T} не поддается простому описанию.

6.2. Правильные фокусирующие компоненты (лузы). Пусть область Q имеет фокусирующие компоненты границы. Обозначим ∂^-Q их объединение и положим $M_1^- = \{x: \pi(x) \in \partial^-Q\}$. Назовем фокусирующую компоненту $\Gamma \subset \partial Q$ *правильной* (или *лузой*), если она является дугой некоторой окружности O_Γ , и круг K_Γ , ограниченный окружностью O_Γ , пересекается с ∂Q только по дуге Γ ($\Gamma \neq O_\Gamma$).

Бильярды с правильными фокусирующими компонентами были введены и изучены в [5, 17] и оказались очень похожими на рассеивающие бильярды: они гиперболичны, эргодичны и являются K -системами. В дальнейшем класс нерассеивающих гиперболических бильярдов был существенно расширен в [32, 27], но мы не имеем возможности охватить все эти случаи и ограничимся только правильными фокусирующими компонентами.

Определим функцию $k(x)$ как номер первого отражения траектории точки $x \in M_1^-$ от $\partial^+Q \cup \partial^-Q$ и построим производный автоморфизм \hat{T} по T и множеству $M_1^+ \cup M_1^-$ (т. е. $\hat{T}x = T^{k(x)}x$). Будем предполагать, что область Q удовлетворяет условиям A' , B' и B'' из п. 6.1.

Гиперболические свойства бильярдов с лузами описаны в [5, 17], и мы кратко перечислим необходимые результаты. Назовем кривую $\gamma \subset M_1^-$ задаваемую уравнением $\varphi = \varphi(r)$, *возрастающей* (*убывающей*), если $d\varphi/dr < 0$ ($d\varphi/dr > 0$), вопреки традиционному определению. Свойство возрастания (убывания) сохраняется под действием T^n при $n > 0$ ($n < 0$), и p -длина возрастающих (убывающих) кривых увеличивается под действием T (T^{-1}). Это связано с так называемым свойством *дефокусировки*: возрастающая кривая порождает сходящийся пучок траекторий, который проходит через точку дефокусировки и подходит к следующему отражению уже расходящимся, причем точка дефокусировки лежит на первой половине пути между отражениями (рис. 19). ЛНМ и ЛУМ в M_1^- задаются дифференциальными уравнениями с помощью таких же бесконечных цепных дробей $B^u(x)$, $B^s(x)$ как и в § 2. Сходимость этих дробей выводится из условия дефокусировки [6].



Рис. 19

В отличие от рассеивающих бильярдов, растяжение и сжатие в \hat{M}_1^- неравномерное, т. е. коэффициенты растяжения и сжатия для любой степени T^n не отделены от единицы. Это связано с тем, что серия последовательных отражений от одной фокусирующей компоненты не приводит к растяжению и сжатию (в частности, бильярд в круге не гиперболичен!). Поэтому мы вынуждены вновь перейти к производному отображению: положим $\hat{M}_1 = M_1^+ \cup \{x \in M_1^-: \pi(x) \in \Gamma_i \subset \partial^-Q, \pi(T^{-1}x) \in \Gamma_j \subset \partial Q, j \neq i\}$ и рассмотрим производный автоморфизм $\hat{T}: \hat{M}_1 \rightarrow \hat{M}_1$. Множество $\hat{M}_1 \subset M_1^-$ в координатах (r, φ) является объединением конечного числа параллелограммов. Тогда для некоторого $m_0 \geq 1$ отображение \hat{T}^{m_0} обладает равномерным растяжением и сжатием (ср. с T^{m_0} в § 2). Тем самым, автоморфизм \hat{T} обладает всеми локальными свойствами, описанными в § 2.

Глобальные свойства автоморфизма \hat{T} определяются структурой кривых разрыва, число которых в данном случае бесконечно. Кривые разрыва

накапливаются в окрестностях особых точек $z \in \hat{M}_1$, соответствующих касательным направлениям к лузам в их концевых точках (рис. 20, а). На рис. 20, б изображена структура кривых разрыва отображения \hat{T} в окрестности точки z_1 . Эта структура аналогична исследованной в п. 4.4 для рассеивающих бильярдов с бесконечным горизонтом. Легко также проверить, что коэффициент растяжения у отображения \hat{T} неограниченно растёт

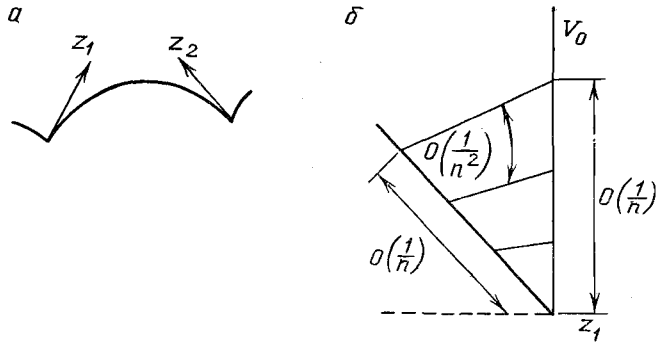


Рис. 20

в окрестности точки z_1 . Эти свойства позволяют перенести методы построения марковского разбиения из п.п. 4.3, 4.4 на рассматриваемый случай без существенных изменений. В результате получим марковское разбиение $\hat{\eta}$ для автоморфизма \hat{T} .

Остается перейти от $\hat{\eta}$ к марковскому разбиению η для T . Пусть $U \in \hat{\eta}$ — произвольный элемент ($U \subset \hat{M}_1$). Тогда U лежит в одной из областей непрерывности отображения \hat{T} . Поэтому найдется $k(U) \geq 1$ такое, что $T^i U \subset M_1 \setminus \hat{M}_1$ при всех $1 \leq i < k(U)$ и $T^{k(U)} U \subset \hat{M}_1$. Множества $U, TU, \dots, T^{k(U)-1}U$ при всевозможных $U \in \hat{\eta}$ образуют марковское разбиение для отображения T , что проверяется непосредственно. Тем самым доказана

Теорема 6.2. Пусть область Q бильярда удовлетворяет условиям A', B', B' и фокусирующая часть границы $\partial Q \neq \emptyset$ состоит только из луз. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется марковское разбиение с элементами диаметра не более ϵ .

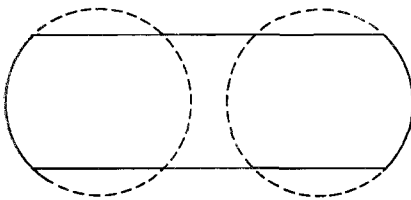


Рис. 21

Эта система имеет самостоятельные приложения [14]. Гиперболичность и эргодичность стадиона доказаны в [17]. Отметим, что если отрезки на границе стадиона непараллельны, то он удовлетворяет условию B' и, тем самым, теореме 6.2.

Для стадиона сохраним обозначения \hat{M}_1, \hat{T} и \hat{T} , введенные в п.п. 6.1, 6.2. Фазовое пространство \hat{M}_1 представляет собой объединение двух параллелограммов (рис. 22, а). В окрестностях точек A, B, C, D накапливается бесконечное число кривых разрыва преобразования \hat{T}^{-1} (рис. 22, а). Их структура (рис. 22, б) аналогична исследованной в п. 4.4 для бильярдов с бесконечным горизонтом. Легко проверить, что коэффициент растяжения

6.3. «Стадион». Ограничение B' в теореме 6.2, как и в п. 6.1, является весьма стеснительным. Здесь мы рассмотрим одну систему, не удовлетворяющую B' — так называемый стадион. Это бильярд в области, ограниченной двумя параллельными отрезками и двумя дугами окружностей (рис. 21).

у отображения \hat{T}^{-1} неограниченно растет в окрестностях точек A, B, C, D . Если дуги, ограничивающие стадион, меньше полуокружности, то кривые разрыва преобразования \hat{T} накапливаются в окрестностях четырех точек A', B', C', D' и имеют аналогичную структуру (рис. 22, а). Если же стадион ограничен полуокружностями, то $A' = A, B' = B, C' = C, D' = D$ и происходит наложение кривых разрыва для \hat{T} и для \hat{T}^{-1} (рис. 22, в).

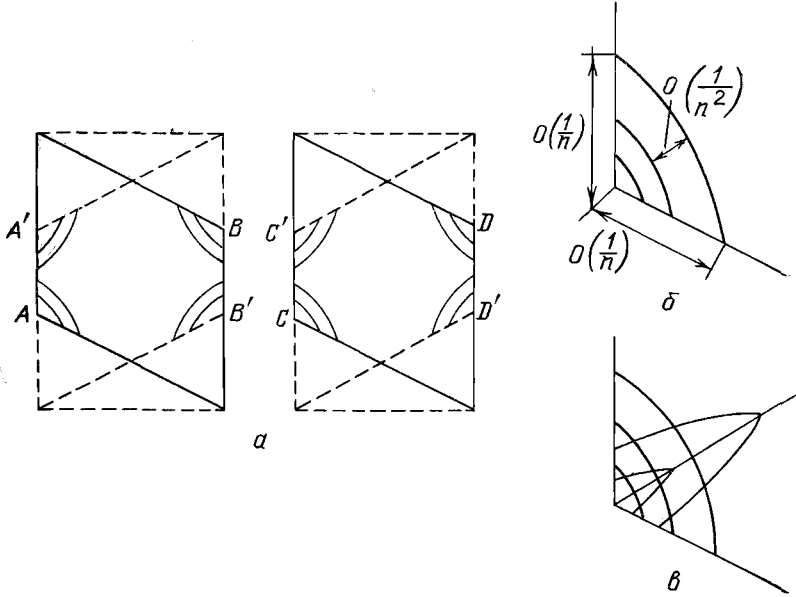


Рис. 22

Этот случай аналогичен особым точкам типа $SV_{см}$ в биллиардах с бесконечным горизонтом, рассмотренным в п. 4.3. Поэтому методы построения марковского разбиения, развитые в § 4, переносятся на случай стадиона. Наконец, переход от марковского разбиения $\hat{\eta}$ для автоморфизма \hat{T} к марковскому разбиению η для автоморфизма T не отличается от описанного в п. 6.2.

§ 7. Оценки числа периодических точек

Результаты данного параграфа получены одним из авторов — Н. И. Черновым.

7.1. Модификация символической динамики. Как отмечалось в § 5, кодировка $\sigma(x)$ для $x \in M_1$ может быть неединственной. Для подсчета числа периодических точек важно, чтобы число различных кодировок $\sigma(x)$ для каждой отдельной точки $x \in M_1$ было равномерно ограничено. Для этих целей мы введем новое, более аккуратное определение матрицы пересечений Π .

Вернемся к построенному в § 5 марковскому разбиению $\eta = \Omega^*$ для отображения T^m . Рассмотрим два параллелограмма $\Delta_0^*, \Delta_1^* \in \Omega^*$ такие, что $\Delta_0^* \cap T^k \Delta_1^* \neq \emptyset$ для некоторого $|k| \leq m$. Ясно, что $\Delta_0^* \cap T^k \Delta_1^*$ — замкнутый параллелограмм. Выделим в нем подмножество $\Upsilon_0 (\Delta_0^* \cap T^k \Delta_1^*)$ точек x , принадлежащих M_2 и таких, что характеристические окрестности $V(x)$ и $V(T^{-k}x)$, связанные, соответственно, с Δ_0^* и Δ_1^* , удовлетворяют соотношению $T^k V(T^{-k}x) \cap V(x) \neq \emptyset$. Далее, обозначим $\Upsilon (\Delta_0^* \cap T^k \Delta_1^*)$ замыкание множества $\Upsilon_0 (\Delta_0^* \cap T^k \Delta_1^*)$ в M_1 . Используя конструкцию разбиения Ω^* (п. 5.8), можно проверить, что $\Upsilon (\Delta_0^* \cap T^k \Delta_1^*)$ является параллелограммом.

Аналогично определяется множество $\Upsilon (\Delta_0^* \cap T^{k_1} \Delta_1^* \cap \dots \cap T^{k_p} \Delta_p^*)$ для нескольких $|k_i| \leq m$ и $\Delta_i^* \in \Omega^*$. Из замечания 5.10 вытекает следующая

Л е м м а 7.1. Пусть $\Delta_0^* \in \Omega^*$ и $|k_i| \leq m$ при $1 \leq i \leq p$ для произвольного $p \geq 1$. Тогда для любой точки $x \in \Delta_0^* \cap M_2$ найдутся параллелограммы $\Delta_i^* \in \Omega^*$, $1 \leq i \leq p$, такие, что $x \in \Upsilon (\Delta_0^* \cap T^{k_1} \Delta_1^* \cap \dots \cap T^{k_p} \Delta_p^*)$.

Определим марковское разбиение Ω' для отображения T как набор параллелограммов

$$(7.1) \quad \Upsilon (\Delta_0^* \cap T \Delta_1^* \cap \dots \cap T^{m-1} \Delta_{m-1}^*)$$

при всевозможных $\Delta_0^*, \dots, \Delta_{m-1}^* \in \Omega^*$, при которых множество (7.1) не пусто. Будем обозначать элементы Ω' через Δ' . В силу леммы 7.1 каждая точка $x \in M_2$ покрыта хотя бы одним параллелограммом $\Delta' \in \Omega'$. Из этой же леммы вытекает, что для каждой $x \in M_2$ найдутся параллелограммы $\Delta_0^*, \Delta_1^*, \dots, \Delta_m^* \in \Omega^*$ такие, что $x \in \Upsilon (\Delta_0^* \cap T \Delta_1^* \cap \dots \cap T^m \Delta_m^*)$. При этом параллелограммы $\Delta_1' = \Upsilon (\Delta_0^* \cap T \Delta_1^* \cap \dots \cap T^{m-1} \Delta_{m-1}^*)$ и $\Delta_2' = \Upsilon (\Delta_1^* \cap T \Delta_2^* \cap \dots \cap T^{m-1} \Delta_m^*)$ не пусты и потому входят в Ω' . Поскольку $x \in \Delta_1' \cap T \Delta_2'$, то из леммы 5.13 вытекает следующая

Л е м м а 7.2. При описанных выше условиях пересечение $\Delta_1' \cap T \Delta_2'$ правильное.

Тем самым, Ω' является марковским разбиением для T .

Переопределим матрицу пересечений $\Pi = \|\pi_{ij}\|$ следующим образом. Пусть $\Delta_i' = \Upsilon (\Delta_{0,i}^* \cap T \Delta_{1,i}^* \cap \dots \cap T^{m-1} \Delta_{m-1,i}^*)$ и $\Delta_j' = \Upsilon (\Delta_{0,j}^* \cap T \Delta_{1,j}^* \cap \dots \cap T^{m-1} \Delta_{m-1,j}^*)$ — два параллелограмма из Ω' . Положим $\pi_{ij} = 1$ в том и только в том случае, когда $\Delta_{p,i}^* = \Delta_{p+1,j}^*$ при всех $0 \leq p \leq m-2$ и множество $\Upsilon (\Delta_{0,i}^* \cap T \Delta_{1,i}^* \cap \dots \cap T^{m-1} \Delta_{m-1,i}^* \cap T^m \Delta_{m-1,j}^*)$ не пусто. В остальных случаях положим $\pi_{ij} = 0$. Из леммы 7.2 вытекает, что при $\pi_{ij} = 1$ пересечение $\Delta_j' \cap T \Delta_i'$ правильное, но обратное не всегда верно. (Можно показать, что для невырожденных параллелограммов обратное верно: если $\nu(\Delta_i') > 0$, $\nu(\Delta_j') > 0$ и пересечение $\Delta_j' \cap T \Delta_i'$ правильное, то $\pi_{ij} = 1$. Таким образом, наша модификация матрицы пересечений касается лишь вырожденных параллелограммов.) В дальнейшем мы будем рассматривать только ТМЦ (Σ_{Π}, θ) , построенную с помощью новой матрицы Π .

Эта ТМЦ обладает следующими основными свойствами:

У т в е р ж д е н и е 7.3. а) Каждая точка $x \in M_2$ обладает хотя бы одной кодировкой $\sigma(x) \in \Sigma_{\Pi}$;

б) для точек $x \in M_2$ таких, что $T^k x \notin \tilde{\partial} \eta$ при всех целых k , кодировка $\sigma(x)$ единственна;

в) каждая точка $x \in M_1$ имеет не более четырех кодировок $\sigma(x) \in \Sigma_{\Pi}$.

Для доказательства последнего утверждения следует рассмотреть четыре инфинитезимальные четверть-окрестности точки x , на которые ЛНМ $\gamma^u(x)$ и ЛУМ $\gamma^s(x)$ делят инфинитезимальную окрестность $\hat{V}(x)$ точки x и проверить, что каждая из них порождает не более одной кодировки $\sigma(x) \in \Sigma_{\Pi}$ в силу конструкции матрицы Π .

7.2. Сравним число периодических точек автоморфизма T и ТМЦ (Σ_{Π}, θ) . Для гладких гиперболических систем асимптотика числа периодических точек самой системы и соответствующей ей ТМЦ, как правило, одинакова [3, 29]. Мы покажем, что подобное совпадение асимптотик имеет место и в нашем случае.

Обозначим P_n число периодических точек периода n для автоморфизма T (т. е. число решений уравнения $T^n x = x$) и $P_n(\Pi)$ число периодических точек периода n символической системы (Σ_{Π}, θ) .

Теорема 7.4. *Найдется константа $C = C(Q) < \infty$ такая, что $|P_n - P_n(\Pi)| < C$ для любого $n \geq 1$.*

Доказательство состоит из серии лемм.

Лемма 7.5. *При условии B теоремы 1.1 лишь конечное число периодических точек лежит в множестве $R_{-\infty, \infty}$.*

Доказательство. Периодическими могут быть особые точки в билиярдах с бесконечным горизонтом (см. § 4), но этих точек конечное число. Если точка $x \in R_{-\infty, \infty}$ периодическая и неособая (рис. 23), то нетрудно проверить, что через точку x проходит бесконечное число регулярных компонент множества $R_{-\infty, \infty}$, что противоречит условию B теоремы 1.1. Лемма доказана.

Следствие 7.6. *Все периодические точки, за исключением конечного числа их, содержатся в M_2 .*

Лемма 7.7. *Точка $x \in M_2$ периодична тогда и только тогда, когда каждая ее кодировка $\sigma(x)$ непериодична. Если $T^k x \notin \tilde{\delta}\eta$ при всех целых k , то период точки x совпадает с периодом кодировки $\sigma(x)$.*

Доказательство. Пусть кодировка $\sigma(x)$ периодична. Тогда из сопряжения $\Phi \circ T = \theta \circ \Phi$ (см. п. 1.2) следует, что точка x периодическая. Далее, если бы периодическая точка x с периодом k имела непериодическую кодировку $\sigma(x)$, то она обладала бы бесконечным набором кодировок $\sigma(x), \theta^k \sigma(x), \theta^{2k} \sigma(x), \dots$, что противоречит утверждению 7.3 в). Наконец, если $T^k x \notin \tilde{\delta}\eta$ при всех целых k , то точка x имеет единственную кодировку и из ее построения следует, что период точки x и последовательности $\sigma(x)$ одинаков.

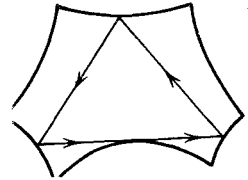


Рис. 23

Лемма 7.8. *Лишь конечное число периодических точек лежит в $\tilde{\delta}\eta$.*

Доказательство немедленно следует из соотношения (5.7).

Суммируя утверждения 7.5—7.8, получаем теорему 7.4.

7.3. Оценки числа периодических точек. Способ подсчета числа периодических точек для ТМЦ заключается в следующем (см., например, обзоры [1, 2]):

Предложение 7.9. *Для любого $n \geq 1$ имеем $P_n(\Pi) = \text{tr } \Pi^n$.*

Здесь Π^n означает n -ю степень матрицы Π . Если Π — счетная матрица, то в общем случае Π^n может содержать бесконечные элементы и тогда возможно, что $P_n(\Pi) = \infty$ для некоторых n . Однако, в нашем случае этого не происходит:

Предложение 7.10. *Найдется постоянная $A_0 = A_0(Q) < \infty$ такая, что $P_n(\Pi) \leq A_0^n$ при всех $n \geq 1$.*

Предложение следует из теоремы 7.5 и результатов [30], где получена экспоненциальная оценка сверху для числа периодических точек в полурассеивающих билиярдах произвольной размерности (без использования марковских разбиений).

С другой стороны, мы можем отметить конечный набор параллелограммов $\Omega'_N = \{\Delta'_{i_1}, \dots, \Delta'_{i_N}\}$ в Ω' и выделить из Π конечную подматрицу Π_N порядка $N \times N$ из элементов $\pi_{i_p, i_q}, 1 \leq p, q \leq N$, соответствующих отмеченным параллелограммам. Обозначим $P_n(\Pi_N)$ число периодических последовательностей $\sigma \in \Sigma_{\Pi}$ с периодом n , состоящих только из символов i_1, \dots, i_N . Очевидно, $P_n(\Pi_N) \leq P_n(\Pi)$ для любого $n \geq 1$. В дальнейшем мы будем пользоваться понятиями разложимой, периодической и примитивной матрицы (см. [2]).

Лемма 7.11. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ и набор невырожденных параллелограммов $\Omega'_N = \{\Delta'_{i_1}, \dots, \Delta'_{i_N}\}$ такой, что*

- а) $\mu(\Delta'_{i_1} \cup \dots \cup \Delta'_{i_N}) > 1 - \varepsilon$;
- б) соответствующая матрица Π_N неразложима;

в) при достаточно малых ε матрица Π_N непериодическая.

Утверждения а), б) легко выводятся из эргодичности преобразования T . Периодичность матрицы Π_N при малых ε противоречила бы свойству перемешивания автоморфизма T . Эргодичность и перемешивание T доказаны в [10, 4] (см. также более простой вариант доказательства в [13, 24]).

Известно, что неразложимая непериодическая матрица из нулей и единиц примитивна (т. е. некоторая ее степень не содержит нулей) [2], откуда вытекает

С л е д с т в и е 7.12. *Найдутся постоянные $A_1 = A_1(Q) > 1$ и $n_0 \geq 1$ такие, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ матрица Π_N , построенная в лемме 7.11, удовлетворяет оценке $P_n(\Pi_N) > A_1^n$ для всех $n \geq n_0$.*

Тем самым доказана следующая

Т е о р е м а 7.13. *Найдутся $A_1 = A_1(Q) > 1$ и $n_0 \geq 1$ такие, что $P_n(\Pi) > A_1^n$ и $P_n > A_1^n$ для всех $n \geq n_0$.*

Отсюда вытекают также оценки для числа периодических траекторий потока $\{S^t\}$. Пусть P_T означает число периодических (замкнутых) траекторий потока $\{S^t\}$ длины не более T . Тогда имеет место

Т е о р е м а 7.14. *Найдутся $B_0 = B_0(Q) < \infty$, $B_1 = B_1(Q) > 1$ и $T_0 > 0$ такие, что $B_1^T \leq P_T \leq B_0^T$ при всех $T > T_0$.*

В случае конечного горизонта эта теорема — прямое следствие утверждений 7.10, 7.13 и 2.3. При бесконечном горизонте следует заметить, что для любого $\varepsilon > 0$ на параллелограммах $\Delta'_{i_1}, \dots, \Delta'_{i_N}$, построенных в лемме 7.11, функция $\tau^+(x)$ ограничена некоторой величиной $\tau_{\max}(\varepsilon) < \infty$ и далее применить следствие 7.12.

Отметим, что для некоторых классов рассеивающих бильярдов получена точная асимптотика величины P_T (см. [28]). Отметим также, что для бильярдов в многоугольниках скорость роста числа периодических точек медленнее экспоненты [23].

В силу теоремы Пуанкаре о возвращении [7] любое состояние i в ТМЦ (Σ_{Π}, θ) , соответствующее невырожденному параллелограмму $\Delta_i \in \Omega'$, возвратно, т. е. найдутся i_1, \dots, i_k такие, что $\pi_{ii_1} = \pi_{ii_2} = \dots = \pi_{i_{k-1}i_k} = \pi_{i_k i} = 1$. Поэтому любой невырожденный параллелограмм содержит хотя бы одну периодическую точку. Вместе с произвольностью ε в формулировке теоремы 1.1 это показывает следующее.

Т е о р е м а 7.15. *Периодические точки всюду плотны в M_1 . Периодические (замкнутые) траектории всюду плотны в M .*

Последняя теорема допускает и более простое доказательство, не использующее марковских разбиений (его сообщил нам Я. Б. Песин).

§ 8. Области с гладкой границей

В этом параграфе мы рассмотрим бильярды с гиперболическим поведением в областях с гладкой границей. В случае бильярдов на торе граница ∂Q может быть как угодно гладкой и даже аналитической (например, когда ∂Q — окружность). Если $Q \subset \mathbb{R}^2$, то неизвестно примеров бильярдов с гиперболическим поведением, в которых граница имеет гладкость выше, чем C^1 . Возможно, таких бильярдов вообще не существует, хотя этот факт до сих пор не доказан. Основанием для этой гипотезы является результат В. Ф. Лазуткина о существовании каустик у бильярда в выпуклой области на плоскости, ограниченной достаточно гладкой кривой.

В эргодической теории бильярдов (и, в частности, в данной статье) всегда рассматривается случай, когда ∂Q состоит из конечного числа кривых класса гладкости не ниже C^3 , имеющих знакопостоянную кривизну (см. § 1). Поэтому, если область Q односвязна, то ее граница имеет гладкость не выше C^1 . Внутренние границы в области Q на плоскости могут иметь как угодно

высокую гладкость. Мы покажем, что, если граница ∂Q имеет гладкость C^1 , то в формулировке теоремы 1.1 не надо требовать выполнения условий А, Б и, соответственно, в формулировке теорем 6.1, 6.2 не надо требовать выполнения условий А, Б. Что касается условия А (или А'), то это очевидно, так как, если ∂Q имеет гладкость C^1 , то все внутренние углы между регулярными компонентами границы равны π . Условие Б (или Б') может не выполняться и в этом случае (например, границу области Q , изображенной на рис. 23, можно сгладить так, что сторона треугольника будет по-прежнему касаться рассеивающей компоненты ∂Q). Оказывается, однако, что для C^1 -гладкой границы ∂Q это условие при построении марковского разбиения можно обойти. А именно, имеет место

Теорема 8.1. Пусть область Q , порождающая двумерный рассеивающий бильярд, имеет границу класса гладкости не ниже C^1 . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует счетное марковское разбиение, диаметры всех элементов которого меньше ε .

Кроме того, справедливы аналоги теорем 6.1 и 6.2.

Теорема 8.2. Пусть область Q , индуцирующая полурассеивающий бильярд, имеет C^1 -гладкую границу и удовлетворяет условию В'. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить марковское разбиение с элементами диаметра не более ε .

Теорема 8.3. Пусть область Q имеет границу ∂Q класса C^1 , фокусирующая часть которой состоит только из луз (и не пуста) и удовлетворяет условию В'. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется марковское разбиение с элементами диаметра не более ε .

Основную роль в доказательстве теорем 8.1—8.3 играет

Лемма 8.4. Пусть область Q имеет границу класса C^1 . Тогда найдется такое $a_0 > 0$, что для любой точки $x \in M_1$ и для любого целого t количество проходящих через x кривых из множества $R_{0,t}$ ($R_{0,-t}$) не превосходит $a_0 |t|$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что отображение T (T^{-1}) на множестве $M_1 \setminus T^{-1}S_0$ ($M_1 \setminus TS_0$) непрерывно. Поэтому через точку $x \in M_1 \setminus T^{-1}S_0$ ($x \in M_1 \setminus TS_0$) проходит не более двух кривых разрыва, принадлежащих множеству R_1 (R_{-1}). Далее рассмотрим прямолинейные отрезки, являющиеся частью какой-либо бильярдной траектории и касающиеся границы ∂Q не менее двух раз (в разных точках M_1). Множество всех таких отрезков обозначим через D . Легко видеть, что $D = D_{\Pi} \cup D_{\Pi}$, где D_{Π} — совокупность прямолинейных отрезков из Q , входящих в состав периодических траекторий потока, порожденного бильярдом в Q , $D_{\Pi} = D \setminus D_{\Pi}$.

Заметим, что в D не входят периодические траектории, при каждом отражении касающиеся границы ∂Q , которые отвечают неподвижным точкам отображения T . Эта ситуация отвечает случаю бесконечного горизонта, подробно рассмотренному в § 4. В частности, такие точки лежат на S_0 , и через них проходит одна кривая, принадлежащая S_1 , и одна S_{-1} .

Множество D состоит из конечного числа отрезков, которое мы обозначим b_0 . При этом, если какая-нибудь траектория проходит через какой-либо из этих отрезков два раза, то эта траектория периодическая. Соответственно, данный отрезок принадлежит D_{Π} . Пусть p_0 — максимальное число точек касания, которые имеют с границей ∂Q отрезки из D .

Лемма 8.5. Для любой точки $x \in M_1$ количество кривых разрыва, принадлежащих $T^m R_0$, при любом t не превосходит $2b_0(p_0 + 1)$.

Лемма 8.4 непосредственно вытекает из леммы 8.5, если положить $a_0 = 2b_0(p_0 + 1)$.

Сформулируем теперь одно общее утверждение о структуре кривых разрыва. Для любой точки $x \in M_1 \setminus S_0$ обозначим $n_+(x) = \min \{n > 0: x \in S_n\}$, ($n_-(x) = \min \{n > 0: x \in S_{-n}\}$). Из леммы 2.8 и общих свойств преобразования T , перечисленных в п.п. 2.1—2.3, вытекает

Лемма 8.6. Для любой кратной точки $x \in M_1 \setminus S_0$ и для любого $m > 0$ найдется ее окрестность $U(x)$ такая, что:

а) замыкание $\bar{U}(x)$ не содержит кратных точек, принадлежащих $R_{-m, m}$, кроме x ;

б) среди всех кривых разрыва, проходящих через x , существует единственная кривая $\Gamma_+(x) \in R_{n_+(x)}$ ($\Gamma_-(x) \in R_{-n_-(x)}$) такая, что $\Gamma_+(x)$ ($\Gamma_-(x)$) делит $U(x)$ на две полуокрестности $U_1^+(x)$ и $U_2^+(x)$ (соответственно, $U_1^-(x)$ и $U_2^-(x)$);

в) все убывающие (возрастающие) кривые разрыва, кроме $\Gamma_-(x)$ ($\Gamma_+(x)$), содержащие точку x , пересекают только одну из полуокрестностей $U_1^+(x)$ или $U_2^+(x)$ (соответственно, $U_1^-(x)$ или $U_2^-(x)$).

Утверждение леммы 8.5 в случае, когда граница ∂Q содержит одну рассеивающую компоненту, непосредственно следует из леммы 8.6, если применить индукцию по m .

Рассмотрим теперь общую ситуацию, когда ∂Q содержит произвольное (конечное) число рассеивающих компонент. Отметим вначале, что если траектория кратной точки x не пересекается с множеством D , то доказательство леммы 8.5 для всех кратных точек этой траектории не отличается от случая, когда ∂Q^+ содержит единственную компоненту.

Итак, нам осталось рассмотреть случай, когда траектория кратной точки x содержит отрезок, касающийся двух различных рассеивающих компонент границы. Здесь снова возможны два варианта, в зависимости от того $x \in D_{\text{II}}$ или $x \in D_{\text{H}}$. Пусть вначале $x \in D_{\text{II}}$, т. е. траектория x — периодическая. Обозначим длину соответствующего периода через $p(x)$. Тогда для любых целых $k_1 > 0$, $k_2 \geq 0$ число кривых разрыва, проходящих через x и принадлежащих $R_{k_1 p(x) + k_2}$, совпадает с числом кривых разрыва, проходящих через x и принадлежащих $R_{p(x)}$. Далее, при прохождении любого (направленного) отрезка из D возникает (в точке фазового пространства M_1 , отвечающей концу этого отрезка) число кривых разрыва (принадлежащих R_1), не превосходящее количества компонент границы ∂Q , которых этот отрезок касается, плюс единица (за счет того, что начало отрезка может совпадать с особой точкой ∂Q). Отсюда вытекает оценка леммы 8.5 для $x \in D_{\text{II}}$.

Пусть, наконец, траектория кратной точки x — непериодическая, т. е. $x \in D_{\text{H}}$. Тогда траектория x проходит через каждый отрезок из D_{H} не более одного раза. При прохождении каждого такого отрезка в его конце «подклеивается», как было показано выше, не более $p_0 + 1$ кривых разрыва (принадлежащих S_1). Таким образом, когда положительная полутраектория x пройдет через все отрезки из D_{H} , то возникнет не более $(p_0 + 1) b_0$ новых кривых разрыва. Оставшаяся часть этой полутраектории состоит из отрезков, которые могут касаться не более одной рассеивающей компоненты ∂Q , а в этой ситуации, как было показано выше, число кривых разрыва, проходящих через данную точку и принадлежащих фиксированному множеству R_m , с ростом m не увеличивается. Тем самым, лемма 8.5 доказана.

Используя лемму 8.4, построение марковского разбиения в случаях, сформулированных в условиях теорем 8.1—8.3, проводится совершенно аналогично, соответственно, теоремам 1.1, 6.1, 6.2. При этом «совершенно аналогично» означает, буквально следующее: все геометрические построения не меняются, различие состоит лишь в выборе констант, определяющих размеры соответствующих геометрических объектов.

Основное отличие от теорем 1.1, 6.1, 6.2 состоит в том, что вместо $K_0 = K_0(Q)$ в условиях теорем 8.1—8.3 возникает теперь $a_0 m$. Поэтому в конце п. 3.1 мы должны положить $\lambda_1 = (200a_0 m)^{-1}$. Далее, формула (3.2) приобретает вид

$$(8.1) \quad \Lambda_m \geq \varepsilon^{-1} (200a_0 m)^2.$$

Данное неравенство будет выполнено при всех достаточно больших m , поскольку Λ_m растет по m экспоненциально. Наконец, правые части неравенств (5.3) и (5.4) следует умножить на m , после чего доказательства всех утверждений проходят без изменений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеев В. М. Символическая динамика. Одиннадцатая математическая школа.— Киев: Изд-во Ин-та мат. АН УССР, 1976.
- [2] Алексеев В. М., Якобсон М. В. Символическая динамика и гиперболические динамические системы: Добавление к сб. статей: Боуэн Р. Методы символической динамики.— М.: Мир.— 1979.— С. 196—240.
- [3] Боуэн Р. Методы символической динамики: Сб. статей.— М.: Мир, 1979.
- [4] Бунимович Л. А., Синай Я. Г. Об основной теореме теории рассеивающих бильярдов // *Мат. сб.*— 1973.— Т. 90, № 3.— С. 415—431.
- [5] Бунимович Л. А. О бильярдах, близких к рассеивающим // *Мат. сб.*— 1974.— Т. 95, № 1.— С. 49—73.
- [6] Бунимович Л. А. Об убывании корреляций в динамических системах с хаотическим поведением // *ЖЭТФ.*— 1985.— Т. 89, вып. 4.— С. 1452—1470.
- [7] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.
- [8] Синай Я. Г. Марковские разбиения и Y -диффеоморфизмы // *Функцион. анализ и его прил.*— 1968.— Т. 2, вып. 1.— С. 64—89.
- [9] Синай Я. Г. Построение марковских разбиений // *Функцион. анализ и его прил.*— 1968.— Т. 2, вып. 3.— С. 70—80.
- [10] Синай Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // *УМН.*— 1970.— Т. 25, вып. 2.— С. 141—192.
- [11] Синай Я. Г. Бильярдные траектории в многогранном угле // *УМН.*— 1978.— Т. 33, вып. 1.— С. 229—230.
- [12] Синай Я. Г. Эргодические свойства газа Лоренца // *Функцион. анализ и его прил.*— 1979.— Т. 13, вып. 3.— С. 46—59.
- [13] Синай Я. Г., Чернов Н. И. Эргодические свойства некоторых систем двумерных дисков и трехмерных шаров // *УМН.*— 1987.— Т. 42, вып. 3.— С. 153—174.
- [14] Современные проблемы математики: Фундаментальные направления.— Т. 2.— М.: Изд-во ВИНТИ.— 1985.
- [15] Хованский А. Н. Приложения цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа.— М.: Гостехиздат, 1956.
- [16] Adler R., Weiss B. Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus // *Proc. Nat. Acad. Sci., USA.*— 1967.— V. 57, № 6.— P. 1573—1576.
- [17] Bunimovich L. A. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // *Comm. Math. Phys.*— 1979.— V. 65, № 3.— P. 295—312.
- [18] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. Markov partitions for dispersed billiards // *Comm. Math. Phys.*— 1980.— V. 73, № 2.— P. 247—280.
- [19] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers // *Comm. Math. Phys.*— 1981.— V. 78, № 4.— P. 479—497.
- [20] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. Markov partitions for dispersed billiards (Erratum) // *Comm. Math. Phys.*— 1986.— V. 107, № 2.— P. 357—358.
- [21] Gallavotti G., Ornstein D. Billiards and Bernoulli schemes // *Comm. Math. Phys.*— 1974.— V. 38, № 2.— P. 83—101.
- [22] Katok A., Strelcyn J. M. Smooth Maps with Singularities: invariant manifolds, entropy and billiards.— *Lect. Notes Math.*— V. 1222.— B.: Springer-Verlag, 1987.
- [23] Katok A. The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard // *Comm. Math. Phys.*— 1987.— V. 111, № 1.— P. 151—160.
- [24] Krámlı A., Simányi N., Szász D. A transversal fundamental theorem for semi — dispersing billiards // *Comm. Math. Phys.*— (in press).

- [25] Kubo I. Perturbed billiard systems 1 // Nagoya Math. J.— 1976.— V. 61.— P. 1—57.
- [26] Levy Y.-E. A note on Sinai and Bunimovich's Markov partition for the billiard.— Preprint / Centre de Phys. Theor.— Paris, 1986.
- [27] Markarian R. Billiards with Pesin region of measure one // Comm. Math. Phys.— 1988.— V. 118, № 1.— P. 87—97.
- [28] Morita T. The symbolic representation of billiards without boundary condition.— Preprint / Tokyo Inst. Technol.— Tokyo, 1989.
- [29] Parry W., Pollicott M. An analogue of the prime number theorem for closed orbits of Axiom A flows // Ann. Math.— 1983.— V. 118, № 3.— P. 573—591.
- [30] Stojanov L. An estimate from above of the number of periodic orbits for semi-dispersed billiards // Comm. Math. Phys.— 1989.— V. 124, № 2.— P. 217—227.
- [31] Wojtkowski M. Invariant families of cones and Lyapunov exponents // Ergod. Theory Dyn. Syst.— 1985.— V. 5, № 1.— P. 145—161.
- [32] Wojtkowski M. Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents // Comm. Math. Phys.— 1986.— V. 105, № 3.— P. 391—414.
- [33] Лазуткин В. Ф. Существование каустик для билиардной задачи] выпуклой области // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1973.— Т. 37, № 1.— С. 188—223.

Институт океанологии
им. П. П. Ширшова АН СССР
Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау АН СССР
Объединенный институт ядерных
исследований

Поступила в редакцию
3 января 1990 г.