Функциональный анализ и его приложения,
1991, т. 25, вып. 1, с. 50–57

УДК 517.53 + 517.57

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭНТРОПИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ

Н. И. Чернов

1. Теория двумерных гиперболических биллиардов разработана Л. А. Бунимовичем и Я. Г. Синаем [1—4]. Приведем необходимые сведения из этой теории. Пусть Q — ограниченная связная замкнутая область на плоскости или на двумерном торе. *Биллиардом* называется динамическая система, порожденная движением точечной частицы с единичной скоростью внутри Q с упругим отражением от границы ∂Q. Предполагается, что Q состоит из конечного числа несамопересекающихся гладких кривых, которые либо замкнуты, либо имеют общие концевые точки.

Биллиард представляет собой кусочно-гладкий поток на трехмерном многообразии $\mathfrak{M} = Q \times S^1$ с краем (здесь S^1 — единичная окружность, отвечающая положениям вектора скорости). Свойства этого потока принято изучать с помощью производного отображения. А именно пусть $n(q)$ — вектор нормали к границе ∂Q в точке q, направленный внутрь Q. Рассмотрим множество $M = \{x = (q, v) \in \mathfrak{M}\colon q \in \partial Q, (v, n(q)) \geqslant 0\}$ и обозначим через T производное отображение $M \to M$, индуцированное биллиардным потоком. На M можно ввести естественные координаты (r, φ), где r — длина дуги на ∂Q и φ — угол между векторами v и $n(q)$. Очевидно, $|\varphi| \leqslant \pi/2$, поэтому в этих координатах M есть конечное объединение цилиндров и (или) прямоугольников $M^{(i)} = \{x = (q, v) \in M\colon q \in \gamma_i\}$, где γ_i $(i = 1, \ldots, K)$ — гладкие компоненты ∂Q. Преобразование T имеет [1] инвариантную меру $d\nu = \cos\varphi\, dr\, d\varphi$. Мы будем рассматривать отображение T только на подмножестве $M' = M \setminus \bigcup_n T^n R$, где R — множество точек разрыва T. Довольно подробное построение M и T проведено в [5].

Для того чтобы T обладало свойствами гиперболичности (за соответствующими определениями мы отсылаем читателя к обзору [6]), достаточно потребовать, чтобы ∂Q была строго выпукла внутрь Q во всех своих точках гладкости. Такие биллиарды называют *рассеивающими* или *биллиардами Синая*. Гиперболичность (в более слабой форме) сохраняется [5], когда ∂Q нестрого выпукла внутрь Q в своих регулярных точках, но не является многоугольником (такие биллиарды называют *полурассеивающими*). Если к границе рассеивающего или полурассеивающего биллиарда добавить несколько выпуклых наружу компонент, имеющих специальный вид [3, 4], то полученные системы также останутся гиперболическими (их называют биллиардами Бунимовича). Во всех упомянутых случаях T является гладким гиперболическим отображением с особенностями. Общая теория этих отображений развита в [7].

В работе [5] для указанных классов биллиардов при некоторых технических ограничениях были построены марковские разбиения. Мы не будем приводить полные определения, отметим лишь необходимые свойства. *Марковское разбиение* η_0 состоит из счетного числа замкнутых подмножеств $U \subset$

$\subset M'$, называемых параллелограммами. Основное их свойство состоит в том, что для любой последовательности $\{U_n\}_{-\infty}^{\infty}$ элементов разбиения η_0 такой, что

$$\nu\,(TU_n \cap U_{n+1}) > 0 \tag{1.1}$$

при всех целых n, пересечение $\bigcap\limits_n T^{-n} U_n$ непусто и состоит ровно из одной точки $x \in M'$ (такие последовательности $\{U_n\}$ далее называются *допустимыми*). Параллелограммы $U \in \eta_0$ имеют положительную меру и образуют, строго говоря, накрытие (mod 0) пространства M: $\nu\,(M \setminus \bigcup\limits_{\eta_0} U) = 0$ и $\nu\,(U' \cap U'') = 0$ при $U' \neq U''$.

В той же работе [5] построено более «богатое» марковское разбиение $\eta_1 \supseteq \eta_0$, которое отличается от η_0 в двух отношениях:

а) параллелограммы $U \subset \eta_1 \setminus \eta_0$ имеют меру 0 и условие (1.1) в определении допустимой последовательности видоизменяется специальным образом на случай этих параллелограммов (см. [5]);

б) элементы разбиения η_1 накрывают все периодические точки отображения T.

Свойство б) и объясняет причину введения разбиения η_1.

Хорошо известно [6, 8], что марковские разбиения порождают символическое представление динамической системы в виде *топологической марковской цепи* (ТМЦ). Напомним ее определение. Пусть $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$ — конечное или счетное множество (*состояний*) и задан конечный или счетный набор упорядоченных пар $\{(s_i, s_j)\}$, называемых *допустимыми переходами* (из s_i в s_j). Фазовое пространство ТМЦ $\Sigma \subset S^{\mathbf{Z}}$ состоит из бесконечных (в обе стороны) последовательностей $\{\sigma_i\}_{-\infty}^{\infty}$ таких, что для всех i переход $(\sigma_i\sigma_{i+1})$ является допустимым. В пространстве Σ определена естественная топология (базой которой служат цилиндрические подмножества в Σ) и гомеоморфизм сдвига Θ: $(\Theta\sigma)_i = \sigma_{i+1}$. ТМЦ (Σ, Θ) называется *неразложимой*, если для любой пары состояний s_i, s_j существуют конечные цепочки допустимых переходов, ведущие из s_i в s_j и из s_j в s_i. Для произвольной ТМЦ (Σ, Θ) с множеством состояний S будем называть ее *подсистемой* всякую ТМЦ, у которой множество состояний $S' \subset S$, а в качестве допустимых переходов берутся все допустимые переходы цепи (Σ, Θ), ведущие из S' в S'.

Обозначим через Σ_0 (Σ_1) фазовое пространство ТМЦ, порожденной разбиением η_0 (η_1). Состояния цепи Σ_0 (Σ_1) соответствуют элементам разбиения η_0 (η_1), поэтому их счетное число. Любая допустимая последовательность $\{U_n\}$ элементов η_0 (η_1) порождает одну «точку» $\sigma \in \Sigma_0 (\sigma \in \Sigma_1)$, которая соответствует точке $x = \bigcap\limits_n T^{-n} U_n$ в пространстве M'. Получаем отображения Φ_0: $\Sigma_0 \to M'$ и Φ_1: $\Sigma_1 \to M'$, которые непрерывны и переводят сдвиг Θ в T [5]:

$$\Phi_0 \circ \Theta = T \circ \Phi_0, \quad \Phi_1 \circ \Theta = T \circ \Phi_1. \tag{1.2}$$

Ясно, что $M_0 = \Phi_0\,(\Sigma_0)$ и $M_1 = \Phi_1(\Sigma_1)$ являются T-инвариантными подмножествами полной меры в M'.

Поскольку отображение T: $M' \to M'$ перемешивает, то ТМЦ (Σ_0, Θ)-неразложима и непериодична [5], в то время как ТМЦ (Σ_1, Θ) может и не обладать этими свойствами.

Будем обозначать символом $P_n\,(T)$ число периодических точек периода n отображения T (т. е. число решений уравнения $T^n x = x$, $x \in M$), а $P_n\,(\Sigma)$ число периодических последовательностей периода n в пространстве Σ произвольной ТМЦ. В [5] доказана оценка

$$| P_n (T) - P_n (\Sigma_1)| \leqslant \text{const} \tag{1.3}$$

для всех $n \geqslant 1$ (здесь const зависит от разбиения η_1).

2. Мы рассмотрим топологическую энтропию цепей Σ_0, Σ_1 и отображения T. Все эти системы определены на некомпактных множествах. Напомним определение топологической энтропии $h(f, X)$ непрерывного отображения f (некомпактного) метрического пространства X в себя [9, 10]. Пусть $V = \{V_1, \ldots, V_r\}$ — конечное открытое покрытие X. Будем обозначать буквой W конечные упорядоченные наборы элементов из V и символом $| W |$ число элементов в наборе W. Для каждого набора $W = \{V_{i_0}, V_{i_1}, \ldots, V_{i_m}\}$ определим $X(W) = \{x \in X: f^k(x) \in V_{i_k}, k = 0, 1, \ldots, m\}$. Рассмотрим величины $\Lambda(V, \lambda) = \lim\limits_{N\to\infty} \inf \{\sum\limits_i \exp(-\lambda | W_i |)\}$, где нижняя грань берется по всем счетным множествам различных наборов $\{W_i\}_1^\infty$ таких, что $X = \bigcup\limits_{i} X(W_i)$ и $\min\limits_{i} | W_i | \geqslant N$. В [9, 10] показано, что найдется такое «критическое» $\lambda_0(V) \in [0, \infty]$, что $\Lambda(V, \lambda) \equiv \infty$ при всех $\lambda < \lambda_0(V)$ и $\Lambda(V, \lambda) \equiv 0$ при всех $\lambda > \lambda_0(V)$. Положим $h(f, X, V) = \lambda_0(V)$ и определим топологическую энтропию как $h(f, X) = \sup\limits_V h(f, X, V)$.

Топологическую энтропию счетной ТМЦ можно определить двумя способами. Б. М. Гуревич [11] компактифицировал пространство состояний S одной точкой s_∞ и тем самым построил компактификацию $\bar{\Sigma}$ пространства Σ, на которой сдвиг Θ доопределяется по непрерывности. После этого определена (обычная) топологическая энтропия $h(\Theta, \bar{\Sigma})$. Он же [11] ввел в пространстве Σ счетной ТМЦ метрику, позволяющую определить топологическую энтропию $h(\Theta, \Sigma)$ непосредственно по изложенной выше схеме.

Теорема 2.1. $h(\Theta, \Sigma) = h(\Theta, \bar{\Sigma}) = \sup h(\Theta, \Sigma')$, *где верхняя грань берется по всем конечным неразложимым подсистемам* Σ' *в* Σ.

Для неразложимых ТМЦ Σ первое равенство доказано в [12], второе — в [11]. Доказательство для случая произвольных ТМЦ получается несложным обобщением, и мы его опускаем.

Далее, для вычисления топологической энтропии отображения T необходимо зафиксировать метрику на M. Мы рассматриваем метрику, совпадающую с евклидовой в координатах (r, φ) на подмножествах $M^{(i)}$ и такую, что расстояния между точками из различных подмножеств $M^{(i)}$, $M^{(j)}$ равны некоторой достаточно большой константе. В этой метрике определена топологическая энтропия $h(T, \tilde{M})$ на любом T-инвариантном подмножестве $\tilde{M} \subset M$.

Основной результат работы — следующая теорема.

Теорема 2.2. а) $h(T, M_0) = h(\Theta, \Sigma_0)$;

б) $h(T, M_1) = h(\Theta, \Sigma_1)$.

Доказательства утверждений а) и б) дословно повторяют друг друга, поэтому приведем доказательство только для случая а).

Покажем вначале, что $h(T, M_0) \leqslant h(\Theta, \Sigma_0)$. Если $V = \{V_1, \ldots, V_r\}$ — открытое покрытие множества M_0, то в силу непрерывности отображения Φ_0 прообразы элементов V образуют открытое покрытие пространства Σ_0, которое мы обозначим V_Σ. Из (1.2) вытекает, что $h(T, M_0, V) = h(\Theta, \Sigma_0, V_\Sigma)$, откуда следует нужное нам неравенство.

Докажем обратное неравенство: $h(T, M_0) \geqslant h(\Theta, \Sigma_0)$. В силу теоремы 2.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная неразложимая подсистема $\Sigma_{0,\varepsilon}$ в ТМЦ Σ_0 такая, что

$$h(\Theta, \Sigma_{0,\varepsilon}) \geqslant h(\Theta, \Sigma_0) - \varepsilon. \tag{2.1}$$

Обозначим состояния подсистемы $\Sigma_{0,\varepsilon}$ через $s_1, \ldots, s_r$. Для конечных ТМЦ имеется естественное образующее разбиение $\widetilde{W} = \{\widetilde{W}_1, \ldots, \widetilde{W}_r\}$, состоящее из открытых множеств $\widetilde{W}_i = \{\sigma_0 = s_i\}$ при $i = 1, \ldots, r$. Состояния $s_1, \ldots$ $\ldots, s_r$ соответствуют некоторым элементам $\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_r$ разбиения η_0. Согласно конструкции разбиения η_0 [5] любой параллелограмм U представляет собой канторовское множество, получающееся из некоторого криволинейного четырехугольника $\Delta(U) \subset M$ удалением счетного числа криволинейных полос, соединяющих пары противоположных сторон $\Delta(U)$ (рис. 1). Стороны $\Delta(U)$ и стороны удаленных полос являются устойчивыми и неустойчивыми слоями для отображения T [5]. Будем называть их граничными (для η_0) слоями. Каждый устойчивый (неустойчивый) граничный слой γ обладает тем свойством, что его образы $T^n\gamma$ сходятся при $n \to \infty$ ($n \to -\infty$) к некоторой периодической орбите преобразования T. Пересечение двух параллелограммов $U', U'' \in \eta_0$ либо пусто, либо лежит на объединении конечного числа граничных слоев.

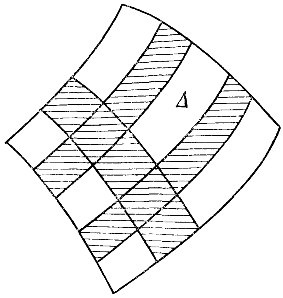

Рис. 1

Для каждого $\widetilde{U}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant r$) рассмотрим открытое в M множество $\widetilde{V}_i$, являющееся внутренностью четырехугольника $\Delta(\widetilde{U}_i)$, из которого удалены только те из указанных выше полос, которые пересекают параллелограммы $\widetilde{U}_j$ ($j \neq i$). Тогда множества $\widetilde{U}_i \setminus \widetilde{V}_i$ лежат на конечном объединении граничных слоев и $\widetilde{V}_i \cap \widetilde{V}_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Рассмотрим множество

$$M'_{0,\varepsilon} = M_0 \cap \Big(\bigcap_{-\infty}^{\infty} T^n \Big(\bigcup_1^r (\widetilde{U}_i \cap \widetilde{V}_i)\Big)\Big).$$

Очевидно, что оно T-инвариантно и $\widetilde{V} = \{\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_r\}$ — его открытое покрытие. Поэтому

$$h(T, M_0) \geqslant h(T, M'_{0,\varepsilon}) \geqslant h(T, M'_{0,\varepsilon}, \widetilde{V}). \tag{2.2}$$

Вернемся к ТМЦ $(\Sigma_{0,\varepsilon}, \Theta)$. Рассмотрим в $\Sigma_{0,\varepsilon}$ подмножество $\Sigma'_{0,\varepsilon} = \Phi_0^{-1} M'_{0,\varepsilon}$. Оно Θ-инвариантно, и Φ_0 отображает его на $M'_{0,\varepsilon}$ биективно. Отсюда немедленно вытекает, что

$$h(T, M'_{0,\varepsilon}, \widetilde{V}) = h(\Theta, \Sigma'_{0,\varepsilon}, \widetilde{W}). \tag{2.3}$$

Любая последовательность $\sigma \in \Sigma_{0,\varepsilon} \setminus \Sigma'_{0,\varepsilon}$ эвентуально периодична в силу отмеченного выше свойства граничных слоев (т. е. $\sigma = \{\sigma_n\}$ периодична при всех $n \geqslant n_0$ или при всех $n \leqslant n_0$ для некоторого n_0). Поэтому, как нетрудно проверить, $h(\Theta, \Sigma_{0,\varepsilon}) = h(\Theta, \Sigma'_{0,\varepsilon})$. Отсюда и из компактности $\Sigma_{0,\varepsilon}$ следует (см. [10, § 4]), что

$$h(\Theta, \Sigma'_{0,\varepsilon}, \widetilde{W}) = h(\Theta, \Sigma_{0,\varepsilon}). \tag{2.4}$$

Суммируя оценки (2.1)—(2.4) и учитывая произвольность ε, получаем нужное неравенство. Теорема доказана.

Замечание 2.3. Естественно попытаться обобщить теорему 2.2 на случай топологического давления (см. [10]), т. е. для произвольной непрерывной на M функции φ такой, что функция $\varphi \circ \Phi_0$ равномерно непрерывна на Σ_0, и установить равенство топологических давлений φ на M_0 и

$\varphi \circ \Phi_0$ на Σ_0:

$$P_{M_0}(\varphi) = P_{\Sigma_0}(\varphi \circ \Phi_0) \tag{2.5}$$

(в обозначениях работы [10]). Используя свойства разбиения η_0 [5], нетрудно показать, что любая такая функция φ должна быть постоянной на M. Причина этого состоит в том, что «естественная» компактификация пространства M_0 в $\overline{M}$ не согласована с компактификацией $\bar{\Sigma}$ счетной ТМЦ Σ. Для постоянных же функций равенство (2.5) является тривиальным следствием теоремы 2.2, поскольку в этом случае топологическое давление равно топологической энтропии плюс значение функции φ. Аналогичный вывод справедлив и для разбиения η_1.

Следствие 2.4. $\liminf_{n\to\infty} \log P_n(T)/n \geqslant h(T, M_1) \geqslant h_\nu(T)$, *где* $h_\nu(T)$ — *метрическая энтропия автоморфизма* T *по мере* ν.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\Sigma_{1,\varepsilon}$ — конечная неразложимая подсистема в Σ_1 такая, что $h(\Theta, \Sigma_{1,\varepsilon}) \geqslant h(\Theta, \Sigma_1) - \varepsilon$. Известно [8], что $\lim \log P_n(\Sigma_{1,\varepsilon})/n = h(\Theta, \Sigma_{1,\varepsilon})$. Поскольку $P_n(\Sigma_{1,\varepsilon}) \leqslant P_n(\Sigma_1)$, то в силу (1.3) имеем $\liminf_{n\to\infty} \log P_n(T)/n \geqslant h(\Theta, \Sigma_{1,\varepsilon})$. Из произвольности ε и теоремы 2.2 получаем первое неравенство следствия 2.4. Второе следует из общих результатов [10].

Доказанное следствие дает ответ на вопрос, поставленный в [13]. Оно также обобщает на биллиардные системы результат А. Катка [14], который получил оценку $\limsup_{n\to\infty} \log P_n(f)/n \geqslant h_\mu(f)$ для диффеоморфизма f класса $C^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ компактного многообразия с инвариантной мерой μ и ненулевыми характеристическими показателями Ляпунова.

3. Рассмотрим несколько примеров, в которых удается оценить или даже вычислить топологическую энтропию биллиардов.

3.1. Первый пример — рассеивающие и полурассеивающие биллиарды на плоскости. Мы предполагаем выполненными условия, при которых в [5] построено марковское разбиение η_0. В частности, для полурассеивающих биллиардов число идущих подряд отражений от прямолинейных компонент границы ∂Q равномерно ограничено сверху. Для таких биллиардов Л. Стоянов [13] доказал оценку $P_n(T) \leqslant K(K-1)^{n-1}$, где K — число регулярных компонент границы ∂Q. Регулярные компоненты, согласно [13], должны удовлетворять следующему условию:

(A) *каждая компонента является частью границы некоторой выпуклой области на плоскости.*

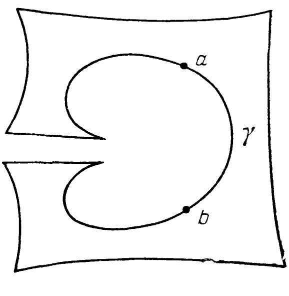

Рис. 2

Чтобы добиться выполнения этого условия, иногда приходится увеличивать число естественных регулярных компонент путем условного разделения их на составные части. Например, биллиард на рис. 2 имеет восемь естественных регулярных компонент границы ∂Q, но компонента γ не удовлетворяет (A). Поэтому необходимо условно разделить ее на три части (например, в точках a и b), т. е. для данного биллиарда $K = 10$. Обозначим символом K_C минимальное число регулярных компонент ∂Q, при котором выполнено условие (A).

Из оценки Стоянова и теоремы 2.1 следует, что $h(\Theta, \Sigma_1) \leqslant \log(K_C - 1)$, поэтому из теоремы 2.2 вытекает оценка

$$h(T, M_0) \leqslant h(T, M_1) \leqslant \log(K_C - 1).$$

Можно доказать несколько более сильную оценку $h(T, M') \leqslant \log(K_C - 1)$. Для этого рассмотрим открытое покрытие $V^* = \{M^{(1)}, \ldots, M^{(K_C)}\}$ пространства M (см. п. 1). Из гиперболических свойств T [5] следует, что V^* — топологически образующее разбиение M. Поэтому $h(T, M') = h(T, M', V^*)$. Последняя величина не превосходит $\log(K_C - 1)$, поскольку $\operatorname{card} V^* = K_C$ и $TM^{(i)} \cap M^{(i)} = \varnothing$ для каждого $i = 1, \ldots, K_C$.

3.2. Второй пример — «газ Икавы — Мориты». В работах [15, 16] рассмотрен интересный пример биллиарда в области Q на плоскости, дополнение к которой является объединением K попарно непересекающихся строго выпуклых замкнутых областей $C_1, \ldots, C_K$ с гладкой границей, удовлетворяющих условию

(B) *для любых трех различных C_i, C_j, C_l выпуклая оболочка множества $C_i \cup C_j$ не пересекается с C_l (т. е. области «не затеняют» друг друга, если осматривать плоскость с границы одной из них).*

Хотя область Q в этом примере и не ограничена, но топологическая энтропия отображения T определена на множестве M' точек $x \in M$, траектории которых испытывают бесконечное число отражений от ∂Q и в прошлом, и в будущем. Используя результаты [16], легко вычислить, что $h(T, M') = \lim\limits_{n\to\infty} \log P_n(T)/n = \log(K - 1)$ (т. е. оценка для топологической энтропии из п. 3.1 точна).

3.3. Вопрос о существовании предела $\lim\limits_{n\to} \log P_n(T)/n$ для произвольных биллиардов остается открытым. Из (1.3) следует, что последовательность $P_n(T)$ в этом выражении можно заменить на $P_n(\Sigma)$. Однако несложно построить пример счетной ТМЦ Σ, для которой последовательность $p_n = \log P_n(\Sigma)/n$ не имеет предела, а ее верхний предел принимает сколь угодно большое значение. Для этого возьмем произвольную последовательность целых чисел $2 \leqslant n_1 \leqslant \leqslant n_2 \leqslant \ldots$ с наибольшим общим делителем 1. Построим цикл C_1 длины n_1, к произвольной его вершине A_1 прикрепим цикл C_2 длины n_2, к произвольной вершине $A_2 \neq A_1$ цикла C_2 прикрепим цикл C_3 длины n_3 и т. д. (рис. 3). Полученному счетному апериодическому графу соответствует счетная неразложимая непериодическая ТМЦ Σ. Из каждой вершины графа выходит не более двух ребер, поэтому $h(\Theta, \Sigma) \leqslant \log 2$. Путем подбора чисел $\{n_i\}$ нетрудно добиться того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \inf p_n = h(\Theta, \Sigma)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \sup p_n$ принимает сколь угодно большое значение.

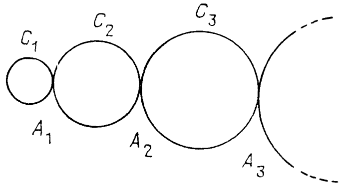

Рис. 3

3.4. Следующий пример — «газ Лоренца». Рассмотрим рассеивающий биллиард на двумерном торе при условии, что длина свободного пробега не ограничена сверху (в этом случае говорят, что система имеет «бесконечный горизонт»). Точки $x \in M$, в окрестности которых длина свободного пробега не ограничена сверху, названы в [5] особыми, и для них была проведена классификация. Мы ограничимся случаем, когда все особые точки $x = (q, v)$ расположены в регулярных точках $q \in \partial Q$. Например, тор, из которого вырезаны один или несколько попарно непересекающихся кругов, может порождать систему данного типа. Такой биллиард называется также газом Лоренца с периодической конфигурацией рассеивателей.

В работе [5] описана структура областей непрерывности отображения T в окрестностях особых точек. Из результатов [5] вытекает, что этих областей счетное число, и если их пронумеровать в порядке приближения к особой точке: A_1, A_2, ..., то справедлива следующая

Лемма 3.1. *Найдутся положительные* n_0, k, c_1, c_2, *зависящие только от рассматриваемой особой точки, такие, что для каждого* $n \geqslant n_0$ *множество* $T^{ik} A_{m_1} \bigcap A_{m_2}$ *имеет непустую внутренность при всех целых* i *и*

$$[c_1 \ n] \leqslant \min \{m_1, \ m_2\} \leqslant \max \{m_1 \ m_2\} \leqslant [c_2 \ n^2], \tag{3.1}$$

здесь $[\cdot]$ — *целая часть числа.*

Далее для произвольного $n \geqslant n_0$ рассмотрим открытое покрытие V_n пространства M', состоящее из областей A_m при всех $\tilde{m}_1 = [c_1 \ n] \leqslant m \leqslant [c_2 \ n^2] = \tilde{m}_2$ и одного множества $M \setminus \mathrm{clos}\,(A_{\tilde{m}_1} \bigcup A_{\tilde{m}_1+1} \bigcup \ldots \bigcup A_{\tilde{m}_2})$ (здесь $\mathrm{clos}\,(A)$ означает замыкание множества A). Из леммы 3.1 вытекает, что для любой последовательности $\{A_{m_i}\}_{-\infty}^{\infty}$ областей, входящих в покрытие V_n, пересечение $\bigcap\limits_i T^{ik} A_{m_i}$ непусто и состоит из точек множества M'. Из результатов [5] также следует, что указанное пересечение состоит из точек множества M_1. Поэтому $h\,(T, \ M_1, \ V_n) \geqslant \log\,([c_2 n^2] - [c_1 n])$. В силу произвольности n получаем $h\,(T, \ M_1) = h\,(T, \ M') = \infty$.

Замечание 3.2. Оценка Стоянова для рассматриваемых в этом примере систем не выполняется. Более того, легко заметить, что $P_n\,(T) = \infty$ уже при $n = 2$ (и тем самым при всех четных n); см. рис. 4.

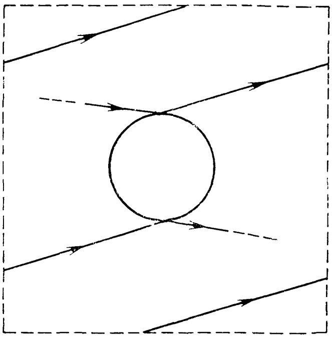

Рис. 4

Замечание 3.3. Метрическая энтропия отображения T в рассматриваемом случае конечна (см., например, оценки [17]). Это означает, в частности, что естественная инвариантная мера ν в M не является мерой максимальной энтропии. По-видимому, это общий факт для биллиардных систем.

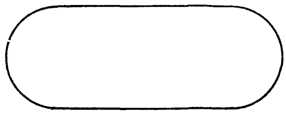

Рис. 5

3.5. В работе [4] доказана эргодичность для одного класса биллиардов, называемых *стадионами*, они определены в областях, ограниченных двумя одинаковыми полуокружностями и двумя параллельными отрезками (рис. 5). В [5] для стадионов построено марковское разбиение.

Отображение T в случае стадиона не обладает равномерными гиперболическими свойствами (см. [5]), в частности, потому, что число последовательных отражений от прямолинейных участков ∂Q не ограничено сверху. Поэтому в [5] рассматривалось производное (по отношению к T) отображение $\hat{T}$, определенное на подмножестве $\hat{M}' \subset M'$, где $\hat{M}' = \{x = (q, \ v) \in M' \colon \ q$ лежит на объединении полуокружностей, входящих в $\partial Q\}$. Отображение $\hat{T}$ имеет счетное число областей непрерывности, структура которых описана в [5]. Эти области накапливаются в окрестностях четырех особых точек. Если пронумеровать данные области в порядке приближения к особой точке: A_1, A_2, ..., то результаты [5] позволяют доказать аналог леммы 3.1, в котором неравенство (3.1) следует заменить на более слабое:

$$[c_1 n] \leqslant \min \{m_1, \ m_2\} \leqslant \max \{m_1, \ m_2\} \leqslant [c_2 n],$$

но при этом $c_1 < c_2$. Отсюда, так же как и в п. 3.4, можно построить покрытие V_n и получить оценку $h(\hat{T}, \hat{M}', V_n) \geqslant \log([c_2 n] - [c_1 n])$, откуда $h(\hat{T}, \hat{M}') = \infty$.

Легко заметить, что у отображения $\hat{T}$ число периодических точек периода 2 (и любого четного периода) бесконечно.

Если вернуться к исходному отображению T для стадиона, то можно показать, что его топологическая энтропия на множестве M' конечна и не превосходит $\log 4$. Это доказывается, как и в п. 3.1, построением образующего разбиения V^* с использованием некоторых лемм работы [18].

Автор выражает благодарность Я. Г. Синаю, стимулировавшему интерес к рассмотренным вопросам, Б. М. Гуревичу и А. С. Заргаряну за ряд полезных обсуждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Синай Я. Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих биллиардов // УМН.— 1970.— Т. 25, вып. 2.— С. 141—192.
2. *Бунимович Л. А., Синай Я. Г.* Об основной теореме теории рассеивающих биллиардов // Мат. сб. — 1973.— Т. 90, № 3.— С. 415—431.
3 *Бунимович Л. А.* О биллиардах, близких к рассеивающим // Мат. сб.— 1974. — Т. 95, № 1. — С. 49—73.
4. *Bunimovich L. A.* On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // Comm. Math. Phys.— 1979.— V. 65. № 3.— P. 295—312.
5. *Бунимович Л. А., Синай Я. Г., Чернов Н. И.* Марковские разбиения для двумерных гиперболических биллиардов // УМН.— 1990.— Т. 45, вып. 3.— С. 97—134.
6. Динамические системы. Т. 2. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— М.: ВИНИТИ, 1985.
7. *Katok A., Strelcyn J. M.* Smooth Maps with Singularities: invariant manifolds, entropy and billiards.— Springer Verlag, 1987.— (Lect. Notes Math. V. 1222).
8. *Алексеев В. М., Якобсон М. В.* Символическая динамика и гиперболические динамические системы / *Боуэн Р.* Методы символической динамики.— М.: Мир, 1979.— С. 196—240.
9. *Bowen R.* Topological entropy for noncompact sets // Trans. Amer. Math. Soc. — 1973.— V. 184.— P. 125—136. [Рус. пер. *Боуэн Р.* Методы символической динамики.— М.: Мир, 1979.]
10. *Песин Я. Б., Пицкель Б. С.* Топологическое давление и вариационный принцип для некомпактных множеств // Функцион. анализ и его прил. — 1984. — Т. 18, вып. 4.— С. 50—63.
11. *Гуревич Б. М.* Топологическая энтропия счетной цепи Маркова // ДАН СССР.— 1969.— Т. 187, № 4.— С. 715—718.
12. *Salama I.* Topological entropy and recurrence of countable chains // Pacific J. Math.— 1988.— V. 132, № 2.— P. 325—341.
13. *Stojanov L.* An estimate from above of the number of periodic orbits for semi-dispersed billiards // Comm. Math. Phys.— 1989.— V. 124, № 2.— P. 217—227.
14. *Katok A.* Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits of diffeomorphisms // Publ. Math. IHES.— 1980.— V. 51.— P. 137—173.
15. *Ikawa M.* Decay of solutions of the wave equation in the exterior of several convex bodies // Ann. Inst. Fourier.— 1988.— V. 38.— P. 113—146.
16. *Morita T.* The symbolic representation of billiards without boundary condition.— Preprint / Tokyo Inst. Technol.— Tokyo, 1989.
17. *Chernov N. I., Fedyanin V. K., Shvedovsky V. A.* Calculation of the billiards h-entropy in the closed plane region with the scattering boundary.— Preprint / E17-83-236.— JINR.— Dubna, 1983.
18. *Katok A.* The groth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard // Comm. Math. Phys.— 1987. — V. 111, № 1,— P. 151—160.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступило в редакцию
18 мая 1990 г.