

УДК 517.53+517.57

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ СИНАЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНТРОПИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ. ПРИЛОЖЕНИЕ К ГАЗУ ЛОРЕНЦА И СТАДИОНУ БУНИМОВИЧА

Н. И. Чернов

§ 1. Введение

Биллиардом называют динамическую систему, порожденную свободным движением материальной точки внутри ограниченной области (сосуда) с упругими отражениями от стенок. Биллиарды служат удобными моделями в ряде областей классической физики (см., например, обзор [3]). В последнее время они используются также при исследовании квантового хаоса (см. [32] и ссылки, данные в [5]).

Если стенки сосуда вогнуты внутрь, то биллиард называется *рассеивающим*. Если же вогнутость нестрогая, т. е. допускаются уплощения, то биллиард *полурассеивающий* (строгие определения см. в § 2). К рассеивающим и полурассеивающим биллиардам сводятся известные в статистической физике модели твердых сфер, газы Лоренца и Рэлея. Эти биллиарды обладают сильными стохастическими свойствами и по своей структуре схожи с геодезическими потоками на поверхностях отрицательной кривизны. А именно, они характеризуются экспоненциальной неустойчивостью траекторий. В ряде случаев для них доказана эргодичность, перемешивание, K-свойство [9, 13, 24, 26] и B-свойство [21]. Близкими к ним являются биллиарды Бунимовича [2, 18]. По аналогии с геодезическими потоками мы будем называть все эти биллиарды *гиперболическими*.

Важной характеристикой динамической системы, отражающей скорость расходимости ее траекторий, является метрическая (колмогоровская) энтропия, введенная в 1958 г. [6]. Методы вычисления энтропии интенсивно развивались в 60-х и 70-х годах. В 1970 году Я. Г. Синай [9] получил формулу для энтропии двумерного рассеивающего биллиарда, а в 1978 г. он же [29] обобщил ее на многомерные полурассеивающие биллиарды, для которых она записывается следующим образом:

$$h = \int_{\mathfrak{M}} \text{tr } \mathcal{B}(x) d\mu(x). \quad (1.1)$$

Здесь \mathfrak{M} — фазовое пространство, μ — мера Лиувилля, а $\mathcal{B}(x)$ — оператор кривизны неустойчивого многообразия в точке x (подробнее см. в § 2). Аналог формулы (1.1) для двумерных биллиардов с возмущениями был получен И. Кубо [27].

Полное доказательство формулы (1.1) в свое время не было опубликовано. Схема прямого доказательства была изложена Я. Г. Синаем в препринте [29]. Однако из-за разрывного характера биллиардных систем проведение прямого доказательства во всех деталях представляется затруднительным.

В настоящей работе мы выводим формулу (1.1) из общей теории гиперболических отображений с особенностями [23]. Мы также формулируем и доказываем аналог формулы (1.1) для бильярдов Бунимовича.

Все полученные формулы собраны в следующих теоремах.

Т е о р е м а 1.1. Пусть полурассеивающий бильярд удовлетворяет условию Γ (см. § 2). Тогда энтропия бильярда (точнее, энтропия сдвига на единицу времени в фазовом потоке) вычисляется по формуле (1.1).

Т е о р е м а 1.2. Пусть T — производное бильярдное отображение (см. § 2) для системы из теоремы 1.1. Тогда его энтропия равна

$$h(T) = \int_M \ln \det (I + \tau(x) \mathcal{B}(x)) dv(x). \quad (1.2)$$

Т е о р е м а 1.3. Пусть T — производное бильярдное отображение для двумерного бильярда Бунимовича, удовлетворяющего условию Γ (см. п. 2.8). Тогда его энтропия равна

$$h(T) = \int_M \ln |1 + \tau(x) \mathcal{B}(x)| dv(x). \quad (1.3)$$

Т е о р е м а 1.4. Энтропия бильярдов, для которых выполнены условия теорем 1.1—1.3, конечна. Для бильярдов в многоугольниках и многогранниках она равна 0. Во всех остальных случаях она строго положительна.

Условие Γ и все обозначения вводятся в § 2. Теоремы 1.1—1.4 доказываются в § 3.

Вторая часть нашей работы посвящена двум популярным моделям — газу Лоренца (§ 4) и стадиону Бунимовича (§ 5). Мы исследуем асимптотическое поведение энтропии этих систем при различных способах деформации границы, когда энтропия стремится к нулю. Интерес к этим вопросам связан с попытками найти закономерности перехода от устойчивого состояния к хаосу. Мы докажем и уточним ряд гипотез, высказанных в работах [16, 17, 20, 32] на основе численных расчетов и нестрогих рассуждений. Мы покажем, что энтропия d -мерного газа Лоренца со сферическими рассеивателями радиуса r имеет порядок $-r^{d-1} \ln r$ при $r \rightarrow 0$. Для стадиона Бунимовича, ограниченного двумя отрезками длины ~ 1 и двумя полукругностями радиуса r , энтропия имеет порядок $-\ln r$ при $r \rightarrow 0$.

Автор выражает благодарность Я. Г. Синаю за неоднократные полезные обсуждения. Эта работа была начата во время пребывания автора в Институте математики Венгерской Академии наук и мой приятный долг поблагодарить А. Крамли и Д. Сааса за гостеприимство.

§ 2. Бильярды, общие сведения

2.1. Определения. Достаточно подробное и полное введение в теорию бильярдов можно найти в [7]. Мы приведем лишь необходимые сведения.

Пусть Q — ограниченная связная открытая область в пространстве \mathbf{R}^d или на d -мерном торе Tor^d с евклидовой метрикой. Предположим, что граница ∂Q состоит из конечного числа гладких компонент $\partial Q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_r$, и каждая компонента Γ_i задана уравнением $\varphi_i(x) = 0$, где $\varphi_i(x)$ — гладкая функция класса не ниже C^5 , которая не имеет особых точек на $\bar{\Gamma}_i$. Предположим также, что множество $\bigcup_{i \neq j} (\bar{\Gamma}_i \cap \bar{\Gamma}_j) = \Gamma^*$ представляет собой конечное объединение подмногообразий размерности $\leq d - 2$. Обозначим $n(q)$ при $q \in \partial Q \setminus \Gamma^*$ единичный вектор нормали к ∂Q , направленный внутрь области Q .

Бильярдом называется динамическая система, порожденная движением с единичной скоростью точечной частицы внутри Q с упругими отражениями от границы ∂Q .

Бильярд называется *рассеивающим* (полурассеивающим), если в любой точке $q \in \partial Q \setminus \Gamma^*$ оператор кривизны $K(q)$ поверхности ∂Q по отношению к внутренней нормали $n(q)$ положительно (неотрицательно) определен, т. е. $K(q) > 0$ (соответственно, $K(q) \geq 0$).

Рассеивающие бильярды называют также бильярдами Синая.

Фазовым пространством \mathfrak{M} системы служит единичный касательный пучок над \bar{Q} , который можно представить в виде $\bar{Q} \times S^{d-1}$ с естественными отождествлениями на границе (здесь S^{d-1} — единичная сфера векторов скорости). Точки $x \in \mathfrak{M}$ будем представлять парой (q, v) , где $q \in \bar{Q}$, $v \in S^{d-1}$. Обозначим π естественную проекцию \mathfrak{M} на \bar{Q} .

Бильярдная система порождает поток $\{S^t\}$ на \mathfrak{M} . Известно, что он сохраняет меру Лиувилля $d\mu = c_\mu dq dv$, где dq, dv — меры Лебега на \bar{Q} и S^{d-1} соответственно, а c_μ — нормирующий множитель: $c_\mu = (|Q| \cdot |S^{d-1}|)^{-1}$ (здесь и далее $|\cdot|$ означает Лебегов объем).

Если траектория бильярдной частицы попала в особое множество Γ^* или испытала бесконечное число отражений за конечное время, то ее дальнейшее движение не определено. В полурассеивающих бильярдах вторая возможность исключена [4], поэтому фазовый поток $\{S^t\}$ определен при всех t ($-\infty < t < \infty$) на следующем подмножестве: $\mathfrak{M}' = \{x \in \mathfrak{M} : S^t x \notin \pi^{-1}\Gamma^* \text{ при всех } t \in \mathbb{R}\}$. Множество \mathfrak{M}' получается удалением из \mathfrak{M} счетного числа компактных подмногообразий меньшей размерности с краем, поэтому $\mu(\mathfrak{M}') = 1$.

З а м е ч а н и е 2.1. Из гладкости компонент Γ_i следует, что кривизна границы ∂Q равномерно ограничена: $\|K(q)\| \leq K_{\max} < \infty$. Кроме того, поверхность ∂Q имеет конечный $(d-1)$ -мерный объем, который мы обозначим $|\partial Q|$.

2.2. Условие Г. Наложим одно дополнительное условие на полурассеивающие бильярды:

У с л о в и е Г. Найдется целое $m_0 \geq 1$ такое, что у каждой точки $q \in \partial Q$ есть окрестность $U_0(q)$, находясь внутри которой любая бильярдная траектория может испытать не более m_0 отражений подряд.

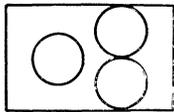


Рис. 1

Я. Г. Синай [10] доказал условие Г при весьма общих предположениях о границе ∂Q . Для системы твердых сфер в пространстве аналогичные условия доказывались в [4, 22]. Если же система твердых сфер в сосуде допускает положение, в котором одна или несколько из них оказываются «зажатыми» (рис. 1), то условие Г нарушается.

Мы используем условие Г лишь однажды в п. 3.5, и похоже, что оно играет несущественную роль. Тем не менее, явления, происходящие при нарушении этого условия, плохо изучены.

2.3. Производное отображение T . Бильярды принято изучать с помощью производного отображения $T: M \rightarrow M$, индуцированного потоком $\{S^t\}$ на множестве M , называемом *краем*: $M = \{x = (q, v) : q \in \partial Q, (v, n(q)) > 0\}$. Для $x \in \mathfrak{M}$ обозначим $\tau(x) = \tau_+(x)$ (и $\tau_-(x)$) первый положительный (отрицательный) момент отражения от ∂Q и $\pi_\pm x = S^{\tau_\pm(x)+0} x$ — две канонические проекции \mathfrak{M} на M . Тогда $T^\pm x = \pi_\pm x$ при всех $x \in M$.

Точку $x = (q, v) \in \mathfrak{M}$ можно задать в других координатах: $x = (\tau, \tilde{q}, v)$, где $\tau = \tau_-(x)$ и $\tilde{q} = \pi(\pi_- x)$. В этих координатах [9]

$$d\mu = c_\mu(v, n(\tilde{q})) d\tau d\tilde{q} dv, \quad (2.1)$$

где $d\tilde{q}$ — Лебегов объем на поверхности ∂Q . Здесь \tilde{q} и v можно также рассматривать как координаты на крае M , поэтому отображение T сохраняет меру $dv = c_v(v, n(\tilde{q})) dq dv$, где c_v — нормирующий множитель: $c_v = (|\partial Q| \cdot |B^{d-1}|)^{-1}$. Здесь $|B^{d-1}|$ — объем $(d-1)$ -мерного единичного шара, равный интегралу от функции $(v, n(\tilde{q}))$ по полусфере $\{v: (v, n(\tilde{q})) > 0\}$. На языке эргодической теории $\{S^t\}$ представляет собой *специальный поток* (или поток Амброуза — Какутани), построенный по автоморфизму T и функции $\tau(x)$.

Метрика на связных компонентах M вводится естественным образом, как прямое произведение римановых метрик на поверхности ∂Q и на сфере S^{d-1} , а расстояния между различными связными компонентами M для нас несущественны, и можно положить их равными достаточно большой константе.

Обозначим $M_s = \bar{M} \setminus M$, где \bar{M} — замыкание множества M в \mathfrak{M} . Тогда на множестве $T^{-1}M_s$ отображение T терпит разрыв.

Для точек $x \in M$ будем обозначать $x_- = \lim_{t \rightarrow 0^-} S^t x$.

2.4. Прозрачные стенки на торе. В случае $\bar{Q} \subset \text{Tor}^d$ удобно использовать иное определение отображения T (см. также [13, 23]). Пусть K — фундаментальная область тора (считаем, что это параллелепипед в \mathbf{R}^d), тогда $\partial \bar{K} = \partial K \cap \bar{Q}$ конечное объединение гиперплоскостей в \bar{Q} . В построенное выше множество M включим точки $\pi^{-1}(\partial \bar{K})$. Отражений от $\partial \bar{K}$ не происходит, поэтому оно играет роль «прозрачных стенок». Все построения п. 2.3 переносятся на этот случай без изменений. Лишь выражение для множителя c_v следует дополнить: $c_v = (|\partial Q| + 2|\partial \bar{K}|) \times |B^{d-1}|^{-1}$. Мы не будем вводить для этих построенных новых обозначений. При необходимости будем говорить, что рассматриваемое отображение T построено по ∂Q , или же по $\partial Q \cup \partial \bar{K}$.

2.5. Свойства дифференциала DS^t . Приступим к более детальному описанию динамики полурассеивающего билиарда, попытаюсь раскрыть механизм экспоненциальной неустойчивости. Пусть $x = (q, v) \in \mathfrak{M}'$ — произвольная точка и $x_t = (q_t, v_t) = S^t x$ ее траектория. Изучим действие дифференциала $DS^t x$. Этот оператор терпит разрывы в моменты отражений, т. е. если $q_t \in \partial Q$, то $DS^{t-0} x \neq DS^{t+0} x$.

Касательное пространство к \mathfrak{M} в точке x можно представить в виде $\mathcal{F}_x \mathfrak{M} = \mathcal{F}_q Q \oplus \mathcal{F}_v S^{d-1}$ и, в свою очередь, можно разложить $\mathcal{F}_q Q = \mathcal{L}(v) \oplus J(x)$, где $\mathcal{L}(v)$ — одномерное пространство, параллельное вектору скорости v , а $J(x)$ — ортогональное этому вектору гиперпространство в \mathbf{R}^d . Скалярные произведения в $\mathcal{F}_q Q$ и $\mathcal{F}_v S^{d-1}$ индуцируются евклидовой метрикой в \mathbf{R}^d . Пространства $\mathcal{F}_v S^{d-1}$ и $J(x)$ можно естественным образом отождествить, так как оба они перпендикулярны v .

Легко видеть, что дифференциал $DS^t x$ переводит $\mathcal{L}(v)$ в $\mathcal{L}(v_t)$ и дополнение $J(x) \oplus \mathcal{F}_v S^{d-1}$ в $J(x_t) \oplus \mathcal{F}_{v_t} S^{d-1}$, причем на $\mathcal{L}(v)$ он изометричен. Поэтому вся интересная информация о нем сосредоточена в $(2d-2)$ -мерном пространстве $J(x) \oplus \mathcal{F}_v S^{d-1}$. Векторы этого пространства будем обозначать парой (dq, dv) , где $dq \in J(x)$ и $dv \in \mathcal{F}_v S^{d-1}$. Обозначим также их образы через $(dq_t, dv_t) = (DS^t x)(dq, dv)$.

Пространства $J(x_t)$ при всех $t \in \mathbf{R}$ можно естественным путем отождествить (см. также [24, 25]). Если на интервале времени (t_1, t_2) нет отражений, то $J(x_{t_1})$ и $J(x_{t_2})$ параллельны и отождествляются сдвигом вдоль вектора v_{t_1} . Если t — момент отражения, то $J(x_{t-0})$ и $J(x_{t+0})$ отождествляются проектированием вдоль вектора нормали $n(q_t)$ (это проектирование изометрич-

но). Применяя эти правила последовательно, отождествим $J(x_t)$ при всех t . В последующих формулах это отождествление используется неявно.

Действие дифференциала $DS^t x$ полностью описывается двумя соотношениями:

$$(dq_{t_2}, dv_{t_2}) = (dq_{t_1} + (t_2 - t_1) dv_{t_1}, dv_{t_1}), \quad (2.2)$$

если на интервале времени (t_1, t_2) нет отражений, и

$$(dq_{t+0}, dv_{t+0}) = (dq_{t-0}, dv_{t-0} + \Theta (dq_{t-0})), \quad (2.3)$$

если t — момент отражения. Здесь и далее Θ означает линейный самосопряженный оператор, записываемый в виде

$$\Theta = 2 (v_{t+0}, n(q_t)) VK(q_t) V^*, \quad (2.4)$$

где V — оператор проектирования $\mathcal{F}_{q_t}(\partial Q)$ на $J(x_{t-0})$ параллельно вектору $n(q_t)$ и V^* — оператор проектирования $J(x_{t-0})$ на $\mathcal{F}_{q_t}(\partial Q)$ параллельно вектору v_{t-0} (см. также [29]). Будем называть Θ *оператором, ассоциированным с рассматриваемым отражением*. Он полностью описывает «вклад» данного отражения в процесс экспоненциального расхождения траекторий.

З а м е ч а н и е 2.2 (о монотонности). В полурассеивающих бильярдах $\Theta \geq 0$, поэтому скалярное произведение $\langle dq_t, dv_t \rangle$ не убывает с ростом t .

2.6. Фронты и ценные дроби. Формальный анализ дифференциала $DS^t x$ требует привлечения довольно громоздкой техники симплектических операторов (такой подход разработал М. Войтковский [31]). Здесь же мы используем непрямой, но более наглядный метод — развитую Я. Г. Синаем [29] технику операторных цепных дробей.

Пусть $x = (q, v) \in \mathfrak{M}$ и задана гладкая $(d-1)$ -мерная ориентируемая поверхность $\tilde{\Sigma} \subset Q$, проходящая через точку q и ортогональная в ней вектору v . Непрерывное ее оснащение Σ векторами нормали, содержащее вектор v , назовем *фронтом волны* или просто *фронтом*. Его образ $\Sigma_t = S^t \Sigma$ также является фронтом, по крайней мере в окрестности точки x_t при $q_t \notin \partial Q$. Обозначим $B(x)$ и $B(x_t)$ операторы кривизны фронтов Σ и Σ_t в точках x и x_t соответственно.

Оператор $B(x_t)$ зависит только от $B(x)$, но не от выбора фронта Σ , и полностью определяется двумя соотношениями:

$$B(x_{t_2}) = B(x_{t_1}) (I + (t_2 - t_1) B(x_{t_1})), \quad (2.5)$$

если на интервале времени (t_1, t_2) нет отражений, и

$$B(x_{t+0}) = B(x_{t-0}) + \Theta, \quad (2.6)$$

если t — момент отражения и Θ — ассоциированный оператор (2.4). Подробный вывод соотношений (2.5) и (2.6) приведен в [31].

З а м е ч а н и е 2.3 (о монотонности). В полурассеивающих бильярдах $\Theta \geq 0$, поэтому если $B(x) \geq 0$, то $B(x_t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$.

Фронт Σ , для которого $B(x) \geq 0$ ($-B(x) \geq 0$), естественно назвать *расходящимся* (*сходящимся*) в точке x .

Л е м м а 2.1 (о цепной дроби). *Для любой точки $x \in \mathfrak{M}'$ существует единственный оператор $B(x) = \mathcal{B}(x)$ такой, что $B(x_t) \geq 0$ при всех вещественных t . Он записывается в виде операторной цепной дроби*

$$\mathcal{B}(x) = \frac{I}{|\tau_-(x)I|} + \frac{I}{|\Theta_1|} + \frac{I}{|\tau_1 I|} + \frac{I}{|\Theta_2|} + \frac{I}{|\tau_2 I|} + \dots, \quad (2.7)$$

где I — тождественный оператор в $J(x)$, τ_i означает промежуток времени между i -м и $(i+1)$ -м отражениями отрицательной полутраектории точки x , а оператор Θ_i ассоциирован с i -м отражением при $t \leq 0$.

Цепная дробь (2.7) введена в [9, 29]. Утверждение леммы следует, например, из результатов [25].

Оператор $\mathcal{B}(x)$ играет ключевую роль в исследованиях по полурассеивающим бильярдам [9, 29, 12, 24–26]. С его помощью записывается уравнение неустойчивого многообразия (см. также наш п.3.3).

2.7. Лемма об инвариантности. Свойства бильярдной системы сильно зависят от наличия нулевого собственного значения у оператора $\mathcal{B}(x)$ и от его кратности. Обозначим $J_+(x)$ собственное пространство этого оператора, соответствующее положительным собственным значениям.

Лемма 2.2 (о б и н в а р и а н т н о с т и). Для почти каждой точки $x \in \mathfrak{M}$ выполнено

$$J_+(x_t) \equiv J_+(x) \quad (2.8)$$

при всех $t \in \mathbf{R}$ (здесь также используется отождествление пространств $J(x_t)$ при различных t).

В более слабом варианте лемма доказана в [15], но в целях полноты и ясности мы воспроизведем ее доказательство здесь.

Обозначим $J_{+,i}$ собственное пространство оператора Θ_i из леммы 2.1, соответствующее его положительным собственным значениям. Из (2.7) легко вытекает, что

$$J_+(x) = \mathcal{L}\left(\bigcup_{i \geq 1} J_{+,i}\right), \quad (2.9)$$

где \mathcal{L} — линейная оболочка системы векторов. Отсюда, в частности,

$$J_+(x_{t_1}) \subseteq J_+(x_{t_2}) \quad (2.10)$$

при $t_1 < t_2$. Поскольку $J_+(x)$ конечномерно, объединение в (2.9) достаточно брать только по конечному набору индексов $i = 1, 2, \dots, i_{\max}(x) < \infty$.

Предположим, что полутраектория точки x при $t \leq 0$ не испытывала касаний с ∂Q при отражениях с номерами $1 \leq i \leq i_{\max}$. Тогда операторы Θ_i при данных i непрерывно зависят от точки x в некоторой ее малой окрестности $U(x)$. Вместе с (2.9) это доказывает, что

$$\dim J_+(y) \geq \dim J_+(x) \quad (2.11)$$

для всех $y \in \mathfrak{M}'$ из некоторой меньшей окрестности $U'(x) \subset U(x)$.

Если обе полутраектории точки x (при $t < 0$ и при $t > 0$) возвращаются в $U'(x)$ бесконечное число раз, то из (2.10) и (2.11) получаем соотношение (2.8). В силу теоремы Пуанкаре о возвращении оно выполнено почти всюду в \mathfrak{M} . Лемма 2.4 доказана.

Лемма об инвариантности играет существенную роль при вычислении характеристических показателей Ляпунова (см. § 3).

2.8. Бильярды Бунимовича. Закончим § 2 кратким описанием бильярдов Бунимовича, которым посвящены его работы [2, 18]. Это бильярды на плоскости или на двумерном торе такие, что гладкие компоненты Γ_i границы ∂Q разделяются на три класса:

- 1) строго вогнутые внутрь области Q ;
- 2) прямолинейные отрезки;
- 3) неполные дуги окружностей, выпуклые наружу, дополнения которых до полных кругов не пересекают других компонент ∂Q .

Компоненты первого типа называются *рассеивающими*, второго — *нейтральными* и третьего — *фокусирующими*.

Условие Γ из п. 2.2 неизбежно нарушается на фокусирующих компонентах, но мы будем предполагать, что оно выполнено в окрестности каждой точки $q \in \partial Q$, не лежащей ни на одной фокусирующей компоненте. В таком биллиарде так же, как и в полурассеивающем, невозможны аномальные траектории, испытывающие бесконечное число отражений за конечное время.

Несложно перенести все обозначения пп. 2.1—2.6 на рассматриваемый случай. Операторы Θ и $\mathcal{B}(x)$ одномерны и их можно считать просто числами. При отражениях от фокусирующих компонент $\Theta < 0$, поэтому замечания 2.2, 2.3 и лемма 2.1 теряют свою силу. Однако имеется компенсирующий механизм, открытый Л. А. Бунимовичем и состоящий в следующем.

Пусть t — момент отражения траектории точки x от $\Gamma_i \subset \partial Q$. Будем называть оператор $B(x_{t+0})$ (в обозначениях п. 2.5) квазиположительным в следующих случаях:

- а) Γ_i — рассеивающая или нейтральная компонента и $B(x_{t+0}) \geq 0$;
- б) Γ_i — фокусирующая компонента и

$$B(x_{t+0}) \leq K(q_t)(v_{t+0}, n(q_t))^{-1}. \quad (2.12)$$

Лемма 2.3. Если для некоторого момента отражения t оператор $B(x_{t+0})$ квазиположителен, то он остается таким при всех последующих отражениях.

Лемма 2.4. Для каждой точки $x \in \mathcal{M}'$ существует единственный оператор $B(x) = \mathcal{B}(x)$ такой, что $B(x_{t+0})$ квазиположителен при всех отражениях (u в прошлом, v в будущем). Оператор $\mathcal{B}(x)$ записывается в виде цепной дроби

$$\mathcal{B}(x) = \frac{1}{|\tau_-(x)|} + \frac{1}{|\theta_1|} + \frac{1}{|\tau_1|} + \frac{1}{|\theta_2|} + \frac{1}{|\tau_2|} + \dots, \quad (2.13)$$

построенной так же, как и в формуле (2.7).

Леммы 2.3 и 2.4 суть переформулировки результатов [2, 18].

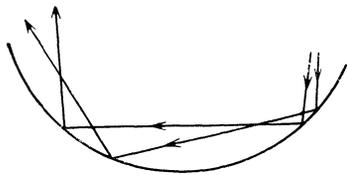
Геометрический смысл условия квазиположительности состоит в выполнении следующего условия дефокусировки [3]:

Расходящийся фронт ($B(x_{t-0}) > 0$), падая в момент t на фокусирующую компоненту, превращается в сходящийся ($B(x_{t+0}) < 0$), но затем проходит точку сопряжения ($B(x_\tau) = \infty$ при некотором $\tau > t$) и вновь становится расходящимся. Точка сопряжения лежит на первой половине свободного пробега между отражениями (это следует из (2.12)), поэтому размеры фронта успевают вырасти, и с каждым отражением он становится шире (рис. 2).

Замечание 2.4 (о знаках). Элементы цепной дроби (2.13) могут иметь разные знаки, поэтому и сама величина

$\mathcal{B}(x)$ может быть отрицательной при некоторых x , а в точках сопряжения она обращается в бесконечность. Из леммы 2.4 следует, что при $x \in M$ величина $\mathcal{B}(x)$ положительна на рассеивающих и нейтральных компонентах и отрицательна на фокусирующих.

Рис. 2



§ 3. Доказательства теорем 1.1—1.4

3.1. Теория Катка — Стрельцина. Наши доказательства основываются на общей теории гиперболических отображений с особенностями [23]. Приведем необходимые определения, сохраняя, по возможности, обозначения [23].

Пусть \mathcal{M} — компактное метрическое пространство с метрикой ρ , $V \subset \subset \mathcal{M}$ — открытое плотное подмножество, являющееся гладким (класса не ниже C^4) римановым многообразием конечной размерности, $\mathcal{N} \subset V$ — открытое подмножество и $\Phi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ — диффеоморфизм класса не ниже C^2 множества \mathcal{N} на $\Phi(\mathcal{N})$, сохраняющий нормированную меру ν , сосредоточенную на \mathcal{N} . Множество $\mathcal{A} = \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$ играет роль особенностей отображения Φ . При некоторых ограничениях, которые будут обсуждаться в п. 3.5, влияние особенностей не слишком велико и по теореме Оселедца [8] отображение Φ имеет характеристические показатели Ляпунова. Это означает, что для ν в почти любой точке x определено $D\Phi$ -инвариантное разложение касательного пространства

$$\mathcal{F}_x \mathcal{N} = \bigoplus_{i=1}^{s(x)} H_i(x)$$

такое, что равномерно по векторам $v \in H_i(x)$, $\|v\| = 1$, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} n^{-1} \log \|D\Phi_x^n(v)\| = \chi_i(x),$$

$i = 1, 2, \dots, s(x)$. Здесь $\chi_1(x) < \dots < \chi_{s(x)}(x)$ — характеристические показатели Ляпунова. В частности, $\mathcal{F}_x \mathcal{N} = E_x^u \oplus E_x^s \oplus E_x^0$, где подпространства E_x^u , E_x^s , E_x^0 соответствуют положительным, отрицательным и нулевым показателям. Назовем E_x^u *неустойчивым пространством* в точке x .

Наличие положительных и отрицательных показателей в системе называется *частичной гиперболичностью*, а при отсутствии нулевых систему называют (*полной*) *гиперболической*. Общую теорию таких систем (при различных условиях гладкости) развил Я. Б. Песин (см. обзор [14]).

Один из результатов работы [23] (см. часть III, следствие 1.4) состоит в доказательстве следующей формулы.

Ф о р м у л а П е с и н а. *Метрическая энтропия отображения Φ равна*

$$h(\Phi) = \int_{\mathcal{N}^0} \sum_+ \chi_i(x) \dim H_i(x) d\nu(x), \quad (3.1)$$

где \sum_+ означает суммирование только по положительным показателям $\chi_i(x)$.

В ходе доказательства формулы (3.1) получено и иное выражение для h (см. [23, часть III, предложение 2.5]):

$$h(\Phi) = \int_{\mathcal{N}^0} \ln |D\Phi_x/E_x^u| d\nu(x), \quad (3.2)$$

где под интегралом записан детерминант линейного отображения неустойчивого пространства E_x^u на $E_{\Phi(x)}^u$ под действием $D\Phi_x$ (или иначе коэффициент растяжения объема в E_x^u под действием $D\Phi_x$).

Биллиарды являются частным случаем рассмотренных в [23] систем. Относительно двумерных биллиардов это показано в [23]. Для многомерных полурассеивающих биллиардов мы проверим это в п. 3.6. Роль пространства \mathcal{M} играет замыкание \bar{M} , роль многообразия V играет край M , роль \mathcal{N} играет $M \setminus T^{-1}M_s$, особое множество в нашем случае $\mathcal{A} = M_s \cup T^{-1}M_s$. Аналогично, сдвиг S^t при каждом $t \neq 0$ является гиперболическим отображением с особенностями. Отметим, что биллиардные системы (и их модификации) — это по существу единственный известный пример гиперболических отображений с особенностями, обладающих абсолютно непрерывной инвариантной мерой.

Наше доказательство теорем 1.1—1.4 состоит из четырех частей. Первая — это доказательство эквивалентности теорем 1.1 и 1.2. Вторая — вывод теорем 1.2 и 1.3 из соотношения (3.2). Третья часть — вывод теоремы 1.4 из остальных. Наконец четвертая, самая рутинная часть — это проверка всех условий, при которых в [23] доказаны формулы (3.1) и (3.2).

3.2. Эквивалентность теорем 1.1 и 1.2. На основании формулы Абрамова [1] для энтропии специального потока запишем

$$h(\{S^t\}) = h(T) \left(\int_M \tau(x) dv(x) \right)^{-1}. \quad (3.3)$$

Для применения формулы (3.3) необходимо доказать, что функция $\tau(x)$ интегрируема на M . Это вытекает из (2.1):

$$\int_M \tau(x) dv(x) = c_v \int_M \tau(x)(v, n(q)) dq dv = c_v \int_{\mathfrak{M}} (v, n(q)) d\tau dq dv = c_v/c_\mu.$$

Отсюда и из (3.3) получаем

$$h(\{S^t\}) = h(T) c_\mu \cdot c_v^{-1}. \quad (3.4)$$

Используя свойства оператора $\mathfrak{B}(x)$ и (2.1), запишем

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{M}} \text{tr } \mathfrak{B}(x) d\mu(x) &= c_\mu \int_{\mathfrak{M}} \text{tr } \mathfrak{B}(x)(v, n(q)) d\tau dq dv = \\ &= c_\mu \int_M \left[\int_0^{\tau(x)} \text{tr } \mathfrak{B}(x)(I + t\mathfrak{B}(x))^{-1} dt \right] (v, n(q)) dq dv = \\ &= c_\mu c_v^{-1} \int_M \ln \det(I + \tau(x)\mathfrak{B}(x)) dv(x). \end{aligned}$$

Сравнивая это с (3.4), заключаем, что теоремы 1.1 и 1.2 эквивалентны.

З а м е ч а н и е 3.1. В случае $Q \subset \text{Tor}^d$ отображение T может быть определено как по ∂Q , так и по $\partial Q \cup \partial \tilde{K}$ (см. п. 2.4), поэтому теорему 1.2 будет достаточно доказать только в одном из этих случаев.

3.3. Доказательство теорем 1.2 и 1.3. Начнем с полурассеивающих бильярдов.

Обозначим E_x^u неустойчивое пространство в точке $x \in M$ для T . Обозначим также \mathcal{E}_x^u неустойчивое пространство в точке $x \in \mathfrak{M}$ для потока $\{S^t\}$.
Л е м м а 3.1. Для почти любой точки $x \in \mathfrak{M}$ можно записать

$$\mathcal{E}_x^u = \{(dq, dv) \in \mathcal{F}_x \mathfrak{M}: dq \in J_+(x), dv = \mathfrak{B}(x) dq\}.$$

Утверждение леммы не является новым — ее аналоги доказывались для различных случаев в [13, 15, 25]. Однако в столь общем виде она не формулировалась, поэтому приведем ее краткое доказательство.

В § 2 отмечалось, что оператор $DS^t x$ действует изометрично на $\mathcal{L}(v)$, поэтому $\mathcal{E}_x^u \subset J(x) \oplus \mathcal{F}_v S^{d-1}$. В силу замечания 2.2 для любого вектора $(dq, dv) \in \mathcal{E}_x^u$ произведение $\langle dq_t, dv_t \rangle$ неотрицательно при всех $t \in \mathbb{R}$. Используя лемму 2.3, отсюда нетрудно вывести, что

$$dv = \mathfrak{F}(x) dq. \quad (3.5)$$

Сделаем одно отступление. Пусть U — открытое в \mathfrak{M} подмножество и $x \in U$. Рассмотрим величины

$$g_{\pm}(x, U) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} I_U(S^{\pm i} x),$$

где $I_U(\cdot)$ — характеристическая функция множества U . Обозначим $\mathfrak{M}_R = \{x \in \mathfrak{M}: g_{\pm}(x, U) > 0 \text{ для всякого открытого } U \ni x\}$. Это множество состоит из точек, обе полутраектории которых возвращаются в любую окрестность самой точки x с положительной частотой. В силу эргодической теоремы Биркгофа и теоремы Пуанкаре о возвращении $\mu(\mathfrak{M}_R) = 1$ (подробнее см. [15]).

Рассмотрим произвольную точку $x \in \mathfrak{M}_R$ и, кроме того, предположим, что для точки x выполнено соотношение (2.8). Из результатов работы [15] (см. аналогичные утверждения в [13, 26]) следует, что любой вектор (dq, dv) такой, что $dq \in J_+(x)$ и $dv = \mathfrak{B}(x) dq$, экспоненциально растягивается (сжимается) под действием $DS^t x$ при $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$). Значит, этот вектор принадлежит неустойчивому пространству \mathcal{E}_x^u .

Осталось проверить, что описанные векторы исчерпывают все пространство \mathcal{E}_x^u . Если это не так, то в силу (3.5) найдется вектор $(dq, dv) \in \mathcal{E}_x^u$ такой, что $dq \perp J_+(x)$ и $dv = 0$. Но для таких векторов $dq_t \equiv dq$, что противоречит определению \mathcal{E}_x^u . Лемма 3.1 доказана.

З а м е ч а н и е 3.2. Из леммы 3.1 и общей теории Катка — Стрельцина [23] вытекает существование почти всюду в \mathfrak{M} локальных неустойчивых многообразий размерности $= \dim J_+(x)$. Это усиливает результат работы автора [15], где это же утверждение было доказано для почти всех точек некоторого открытого плотного в \mathfrak{M} подмножества, мера которого могла быть и меньше 1.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.2. Пусть $x \in M \setminus T^{-1}M_s$. Обозначим $y = Tx$ и $\tau = \tau(x)$. Спроектируем неустойчивые пространства \mathcal{E}_x^u и \mathcal{E}_y^u с помощью дифференциалов $D\pi_-(x)$ и $D\pi_-(y)$, соответственно, на $\mathcal{F}_x M$ и $\mathcal{F}_y M$. Эти проекции обозначим $D_1(x)$ и $D_2(x)$. Для почти любой точки x результатом этих проекций будут неустойчивые пространства E_x^u и E_y^u . Таким образом, отображение DT/E_x^u (с образом в E_y^u) является композицией трех: $D_1^{-1}(x)$, $DS^{\tau+0}(x)/E_x^u$ (с образом в \mathcal{E}_y^u) и $D_2(x)$. Второе из этих отображений обозначим $D_3(x)$. Разложение $DT/E_x^u = D_2 \circ D_3 \circ D_1^{-1}$ можно интерпретировать как переход с края M в полное фазовое пространство \mathfrak{M} , сдвиг вдоль траекторий потока $\{S^t\}$ на время $\tau(x)$ и обратный переход из \mathfrak{M} на край M .

Кроме того, нам потребуются новая метрика в неустойчивых пространствах \mathcal{E}_z^u для потока $\{S^t\}$, порожденная их проекцией на евклидовы пространства $J_+(z)$, т. е. длину любого вектора $(dq, dv) \in \mathcal{E}_z^u$ мы положим равной $\|dq\|$ (в то же время в неустойчивых пространствах E_z^u на крае M сохраним прежнюю метрику). Обозначим $|D_1(x)|$, $|D_2(x)|$, $|D_3(x)|$ коэффициенты растяжения объема в соответствующих линейных пространствах, снабженных указанной метрикой.

Используя формулу (3.2) и выражая DT/E_x^u через D_1 , D_2 , D_3 , запишем

$$h(T) = - \int_M \ln |D_1(x)| dv(x) + \int_M \ln |D_2(x)| dv(x) + \int_M \ln |D_3(x)| dv(x). \quad (3.6)$$

Лемма 3.1 и простые вычисления показывают, что в выбранной нами метрике $|D_3(x)| = \det(I + \tau(x) \mathfrak{F}(x))$, поэтому третий интеграл в (3.6) дает правую часть формулы (1.2). Два первых интеграла в (3.6) равны между собой в силу инвариантности меры ν . Осталось лишь показать, что оба они конечны. Это делается в п. 3.5, а мы на этом закончим доказательство теоремы 1.2.

Доказательство теоремы 1.3 представляет собой полный анализ доказательства теоремы 1.2. Отметим лишь ту разницу, что величина $|D_3(x)|$ из формулы (3.6) равна $1 + \tau(x) \mathcal{B}(x)$ на рассеивающих и нейтральных компонентах и $-1 - \tau(x) \mathcal{B}(x)$ на фокусирующих, в соответствии с замечанием 2.4 (о знаках). Этим объясняется появление модуля в формуле (1.3).

З а м е ч а н и е 3.3. Аналог формулы Синая (1.1) для бильярдов Бунимовича несправедлив, так как функция $\mathcal{B}(x)$ неинтегрируема в окрестностях точек сопряжения.

З а м е ч а н и е 3.4. Гораздо более широкие классы двумерных гиперболических бильярдов построены в недавних работах М. Войтковского [30] и Р. Маркаряна [28]. К ним также применима теория Катка — Стрельцина, но формулу (1.3) мы выписать не можем, так как для них не доказана сходимость цепной дроби (2.13).

3.4. Вывод теоремы 1.4 из трех остальных. Рассмотрим вначале полурассеивающие бильярды. В этом случае все элементы цепной дроби (2.7) — неотрицательно определенные операторы. Поэтому для любого $m \geq 0$ и любой точки $x \in M$ можно записать

$$\|\mathcal{B}(x)\| \leq \|\Theta_1\| + \|\Theta_2\| + \dots + \|\Theta_m\| + 1/\tau_m.$$

Далее нам потребуется условие Г. Из него легко вытекает, что найдется постоянная $\tau_{\min} > 0$ такая, что в любой бильярдной траектории среди $(m_0 + 1)$ последовательных отражений можно выбрать два соседних, между которыми частица двигалась свободно в течение времени $\Delta t \geq \tau_{\min}$.

Выбрав такое $m \leq m_0 + 1$, что $\tau_m \geq \tau_{\min}$, получим оценку

$$\|\mathcal{B}(x)\| \leq 2K_{\max} \sum_{i=1}^m (v_i, n(q_i))^{-1} + \frac{1}{\tau_{\min}},$$

где обозначено $(q_i, v_i) = T^{-i+1}x$. Интегрируя последнее неравенство по M , получаем

$$\int_M \|\mathcal{B}(x)\| dv(x) \leq 2K_{\max}(m_0 + 1) \int_M (v, n(q))^{-1} dv(x) + 1/\tau_{\min} \leq \text{const} < \infty. \quad (3.7)$$

Функция $\tau(x)$ ограничена на M в случае, когда $Q \subset \mathbf{R}^d$ или когда $Q \subset \subset \text{Тог}^d$ и T определено по $\partial Q \cup \widetilde{\partial K}$. Поэтому в этих двух случаях энтропия $h(T)$ конечна. Из результатов п. 3.2 следует конечность $h(\{S^t\})$ и отсюда конечность $h(T)$ в случае, когда $Q \subset \text{Тог}^d$ и T определено по ∂Q .

Рассмотрим бильярды Бунимовича. Пусть $x = (q, v) \in M$ — произвольная точка, лежащая на фокусирующей компоненте границы ∂Q . Из (2.12) следует, что $0 \leq \mathcal{B}(x_-) \leq |K(q)| (v, n(q))^{-1}$. Отсюда и из (2.6) получаем оценку

$$|\mathcal{B}(x)| \leq 2 |K(q)| (v, n(q))^{-1}. \quad (3.8)$$

Объединяя это с оценками, выведенными выше для полурассеивающих бильярдов, получаем неравенство (3.7) для бильярдов Бунимовича. Отсюда также, как и выше, вытекает конечность энтропии $h(T)$ и $h(\{S^t\})$.

Энтропия бильярда в многоугольнике или в многограннике равна 0, так как в этом случае $\mathcal{B}(x) \equiv 0$ на \mathfrak{M} . Этот результат известен (см. обзор [14]).

Если кривизна границы ∂Q отлична от нуля хотя бы в одной точке q_0 , то оператор $\mathcal{B}(x)$ не равен нулю в окрестности полусферы $\pi^{-1}(q_0) \cap M$. Тогда в силу теорем 1.1—1.3 энтропия бильярда положительна.

Теорема 1.4 доказана.

Неравенство (3.7) позволяет также доказать конечность первых двух интегралов в формуле (3.6). Действительно, вернувшись к обозначениям этой формулы, из геометрических соображений получаем, что

$$1 \leq |D\pi_-(x)/\mathcal{E}_x^u| \leq \text{const} [(v, n(q))^{-1} + \mathfrak{P}(x)].$$

Отсюда и из (3.7) выводим конечность первого интеграла. Конечность второго вытекает из равенства его первому.

3.3. Проверка условий Катка — Стрельцина. Завершающий шаг доказательства теорем 1.1—1.4 состоит в проверке всех условий, которым должны удовлетворять наши бильярды для того, чтобы соотношения (3.1), (3.2) были справедливы. Для двумерных (не обязательно гиперболических) бильярдов эта проверка сделана в [23]. В многомерном случае принципиальных отличий не появляется. Поэтому мы лишь сформулируем необходимые условия и кратко очертим путь их проверки.

Мы приводим необходимые условия в том виде, в каком они даны в [23]. Наши формулировки используют обозначения п. 3.1.

Условие 1. Пусть $R(x, V)$ при $x \in V$ означает радиус инъективности экспоненциального отображения $\exp_x: \mathcal{F}_x V \rightarrow V$. Тогда $R(x, V) \geq c_1 \min \{R, \rho(x, M \setminus V)^{a_1}\}$. Величину, стоящую справа, обозначим $R_V(x)$.

Условие 2. Для любых $x, y \in V$ таких, что $\rho(x, y) < R_V(x)$, выполнено $\|D \exp_x(w)\| \leq a_2$ и $\|D(\exp_x^{-1})(y)\| \leq a_2$, где $w = \exp_x^{-1}y$.

Условие 3. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r(\varepsilon) > 0$ такое, что для всяких $x, y \in V$ таких, что $\rho(x, y) < \min(r(\varepsilon), R_V(x)) \stackrel{\text{def}}{=} R_\varepsilon(x)$, выполнено $\|D(\exp_x^{-1})(y)\| \leq 1 + \varepsilon$ и $\|D \exp_x(w)\| \leq 1 + \varepsilon$, где $w = \exp_x^{-1}(y)$.

Условие 4. Метрика ρ имеет конечную емкость.

Условие 5. $v(U_\varepsilon(\mathcal{A})) \leq c_2 \varepsilon^{a_3}$, где $U_\varepsilon(\mathcal{A})$ означает ε -окрестность множества \mathcal{A} в M .

Условие 6. Пусть $\log^+ a = \max\{0, \log a\}$. Тогда

$$\int \log^+ \|D\Phi_x^{\pm 1}\| dv(x) < \infty.$$

Условие 7. $\|D\Phi_x\| \leq c_3 \rho(x, \mathcal{A})^{-a_4}$.

Условие 8. Для $x \in \mathcal{N}$ обозначим $\Phi_{0x} = \exp_{\Phi(x)} \circ \Phi \circ \exp_x$. Тогда $\|D^2\Phi_{0x}(h)\| \leq c_4 \rho(\exp_x(h), \mathcal{A})^{-a_5}$ для всех $h \in \mathcal{F}_x \mathcal{N}$ таких, что $\|h\| < R_V(x)$ и $\Phi_{0x}(h)$ определено.

В условиях 1—8 через R , $a_1 \div a_5$ и $c_1 \div c_4$ обозначены положительные постоянные.

Перейдем к проверке этих условий. Напомним, что в нашем случае $V = M$, $\mathcal{N} = M \setminus T^{-1}M_s$ и $\mathcal{A} = M_s \cup T^{-1}M_s$.

Первые четыре условия являются немедленным следствием гладкости и компактности компонент Γ_i границы ∂Q (см. также замечание в конце п. 2.1). Емкость метрики ρ равна $2d - 2$.

Для упрощения дальнейших рассуждений напомним, что в случае $Q \subset \text{Tor}^d$ достаточно рассмотреть только отображение T , построенное по $\partial Q \subset \partial \bar{K}$. Поэтому мы можем считать, что величина $\tau(x)$ не превышает некоторого $\tau_{\max} < \infty$, а множество \mathcal{A} состоит из конечного числа компактных подмногообразий размерности $\leq 2d - 3$ с краем. Из последнего замечания вытекает условие 5 при $a_3 = 1$ (см., например, [19]).

Доказательство условий 6—8, как и в [23], основано на трех леммах:

Лемма 3.2. Пусть $x \in M$ и $Tx = (q_1, v_1)$. Тогда для некоторого $c_5 > 0$ выполнено $\|DT_x\| \leq c_5 (v_1, n(q_1))^{-1}$.

Лемма 3.3. Пусть $x \in M$ и $w \in \mathcal{F}_x M$. Обозначим $(q_1, v_1) = T(\exp_x w)$. Тогда для некоторого $c_6 > 0$ выполнено $\|D^2 T_{0x}(w)\| \leq c_6 (v_1, n(q_1))^{-3}$.

Лемма 3.4. Пусть $x \in M$ и $Tx = (q_1, v_1)$. Тогда для некоторого $c_7 > 0$ выполнено $\rho(x, \mathcal{A}) \leq c_7 (v_1, n(q_1))$.

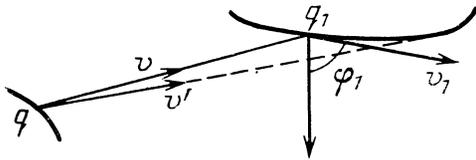
Из лемм 3.2 — 3.4 немедленно вытекают условия 7 и 8 при $a_4 = 1, a_5 = 3$. Для доказательства условия 6 запишем

$$\int_M \log^+ \|DT(x)\| dv(x) \leq c_5 \int_M (v_1, n(q_1))^{-1} dv(x) = c_5 \int_M (v, n(q)) dv(x) = \\ = \frac{1}{2} c_5 |\partial Q| \cdot |S^{d-1}| < \infty.$$

Случай отображения $DT^{-1}(x)$ сводится к предыдущему с помощью естественной инволюции $x \rightarrow x_-$ при $x \in M$.

Осталось доказать леммы 3.2 — 3.4. Для доказательства первых двух из них рассмотрим произвольную точку $x = (q, v) \in M$ и запишем $Tx = (q_1, v_1)$, где согласно биллиардным законам $q_1 = q + \tau(x)v$ и $v_1 = v - 2(n(q_1), v)n(q_1)$. Вектор-функция $n(q)$ на ∂Q имеет ограниченные первые и вторые частные производные. Поэтому рост производных отображения $DT(x)$ обусловлен только особенностями функции $\tau(x)$. Если величина $\delta = (v_1, n(q_1))$ близка к нулю, то первые и вторые производные функции $\tau(x)$ растут как δ^{-1} и δ^{-3} соответственно, что доказывается прямыми расчетами.

Рис. 3



Доказательство леммы 3.4 иллюстрируется на рис. 3. Здесь $x \in M, Tx = (q_1, v_1)$ и φ_1 — угол между векторами v_1 и $n(q_1)$. Если φ_1 близок к $\pi/2$, то найдется вектор v' с началом в точке q такой, что точка $T(q, v') \in M_s$ (т. е. либо в этой точке происходит касательное отражение, либо она попадает в Γ^*), и при этом угол между векторами v и v' не превышает $\text{const} \cos \varphi_1$ (здесь $\text{const} = \text{diam } Q \cdot \tau_{\max}$).

Этим завершается проверка условий 1 — 8. Теоремы 1.1 — 1.4 полностью доказаны.

§ 4. Энтропия периодического газа Лоренца

Периодическом газом Лоренца мы называем биллиард на d -мерном торе ($d \geq 2$), из которого вырезана одна или несколько попарно непересекающихся сферических областей, называемых *рассеивателями*. Если перейти от тора к универсальной накрывающей (в \mathbf{R}^d), то получим движущуюся в пространстве частицу, которая отражается от периодически повторяющейся конфигурации рассеивателей. Стоит упомянуть, что эту систему ввел Г. Лоренц в 1905 г. для описания динамики электронного газа в металлах. В настоящее время для нее доказана эргодичность и К-свойство [11, 13]. Численные расчеты энтропии и скорости убывания корреляций проводились в [17, 20].

Зафиксируем центры рассеивателей и устремим их радиусы к нулю. В пределе получим условно-периодический поток на торе, энтропия которого равна 0 [7, 14]. Нас будет интересовать асимптотика убывания энтропии при оращении рассеивателей.

4.1. Один сферический рассеиватель. Пусть имеется ровно один рассеиватель радиуса r .

Предложение 4.1. Если радиус r достаточно мал, то энтропия производного отображения T равна

$$h(T) = -d(d-1) \ln r + O(1), \tag{4.1}$$

а энтропия фазового потока равна

$$h(\{S^t\}) = -\text{const } r^{d-1} \ln r + O(r^{d-1}), \tag{4.2}$$

где $\text{const} = d(d-1) |B^{d-1}|$.

Здесь и далее $O(r^\alpha)$ означает величину f такую, что $\limsup_{r \rightarrow 0} |r^{-\alpha} f| < \infty$.

Прежде чем доказывать предложение, сделаем несколько замечаний.

Замечание. Формула (4.1) при $d = 2$ предсказана в [20] на основе численных расчетов. Для $d \geq 3$ там же дано ошибочное предсказание ($h(T) \sim -d \ln r$).

Замечание 4.1. Сравнивая (4.1) с формулой Песина (3.1), получаем оценки для максимального показателя Ляпунова:

$$-d \ln r + O(1) \leq \chi_{\max} \leq -d(d-1) \ln r + O(1) \tag{4.3}$$

(в силу эргодичности показателя Ляпунова $\chi_i(x)$ и их кратности, равные $\dim H_i(x)$ в обозначениях п. 3.1, почти всюду в M постоянны). В работе [17] на основе численных расчетов сделано предсказание $\chi_{\max} \sim -(3d + 2)/4 \ln r$, которое, как видно из нашей оценки (4.3), ошибочно при $d \geq 3$.

Гипотеза. Исходя из симметрии сферических рассеивателей, мы можем предположить, что все положительные показатели Ляпунова совпадают, и в соответствии с (4.1) они равны $-d \ln r + O(1)$.

Вообще, вопрос о нахождении всех показателей Ляпунова в многомерных рассеивающих и полурассеивающих бильярдах остается нерешенным (см. некоторые результаты в [31]). Неясен также и физический смысл из показателей χ_i .

Доказательство предложения 4.1. Для краткости будем писать $\langle f \rangle$ вместо $\int_M f(x) dv(x)$ и τ вместо $\tau(x)$. Формула (4.2) немедленно следует из (4.1) и (3.4), поскольку $\langle \tau \rangle = c_\nu/c_\mu = |B^{d-1}|^{-1} r^{-(d-1)} + O(r)$.

Докажем формулу (4.1). Согласно (2.7) оператор $\mathcal{B}(x)$ в точке $x = (q, v) \in M$ записывается в виде $\mathcal{B}(x) = \Theta_1 + (\tau_1 I + \dots)^{-1} = \Theta_1 + \Delta_{\mathcal{B}}$, где Θ_1 — оператор вида (2.4), ассоциированный с отражением в момент $t = 0$. Легко посчитать, что Θ_1 имеет собственное значение $2r^{-1}(v, n(q))^{-1}$ кратности 1 и собственное значение $2r^{-1}(v, n(q))$ кратности $d - 2$. Обозначим $\tilde{\Theta}_1 = r\Theta_1$ и запишем согласно (1.2)

$$\begin{aligned} h(T) &= \langle \ln \det(I + \tau r^{-1} \tilde{\Theta}_1 + \tau \Delta_{\mathcal{B}}) \rangle = \langle \ln(\tau r^{-1})^{d-1} \rangle + \\ &+ \langle \ln \det(\tilde{\Theta}_1 + r\tau^{-1}I + r\Delta_{\mathcal{B}}) \rangle = (d-1) [-\ln r + \langle \ln \tau \rangle] + \Delta_h. \end{aligned}$$

Очевидно, величина $\tau(x)$ отделена от нуля при достаточно малых r , поэтому $\|\Delta_{\mathcal{B}}\| \leq \text{const}$. Отсюда нетрудно вывести, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \Delta_h = H(d) = \text{const}. \tag{4.4}$$

Более того, величину $H(d)$ удастся посчитать явно: $H(2) = 1$, $H(3) = \ln 4$, а при $d \geq 4$ $H(d) = \ln 2^{d-1} - (d-3) \langle \ln(v, n(q)) \rangle = \ln 2^{d-1} - (d-3) |S^{d-2}| \left(\int_0^1 t^{d-2} \ln \sqrt{1-t^2} dt \right)$.

Л е м м а 4.2. *Для достаточно малых r справедлива оценка*

$$\ln \langle \tau \rangle - c_\tau \leq \langle \ln \tau \rangle \leq \ln \langle \tau \rangle,$$

где величина c_τ зависит только от d .

Второе неравенство следует из выпуклости функции $\ln x$. Для доказательства первого оценим меру множества точек $x \in M$, для которых $\tau(x) < z$, здесь z — переменная. Это легко сделать, используя периодичность конфигурации рассеивателей и очевидные геометрические соображения: шар радиуса r на расстоянии L от точки 0 «закрывает» телесный угол $\sim \text{const} (r/L)^{d-1}$.

Результирующая оценка выглядит следующим образом:

$$v \{x \in M: \tau(x) < z\} \leq \sum_{n=1}^{[z]} [n^d - (n-1)^d] (r/n)^{d-1} \leq \text{const} z r^{d-1}$$

при всех $z > 0$ (здесь $[z]$ означает целую часть числа z). Отсюда немедленно вытекает нужное неравенство $\langle \ln \tau \rangle \geq -(d-1) \ln r - \text{const}$. Лемма 4.2 доказана.

Суммируя все полученные выше оценки, приходим к (4.1). Предложение 4.1 доказано.

З а м е ч а н и е. Все наши оценки, кроме первого неравенства в лемме 4.2, содержатся в работе [20]. Там же высказано предположение о существовании предела $\lim (\langle \ln \tau \rangle - \ln \langle \tau \rangle)$ при $r \rightarrow 0$, которое мы, однако, не можем проверить. Если это предположение правильное и предел равен P , то формулу (4.1) можно будет уточнить $h(T) = -d(d-1) \ln r + A + o(1)$, где $A = H(d) + (d-1)[P - \ln |B^{d-1}|]$. В [17] приведена численная оценка $A = 2 \ln \beta$, где $\beta = 2 \pm 0,2$.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим газ Лоренца, в котором радиус рассеивателя r постоянен, а объем тора V стремится к бесконечности. В этом случае в пространстве \mathbf{R}^d получаем периодическую конфигурацию рассеивателей с малой плотностью. Здесь плотностью естественно назвать величину $\rho = V^{-1}$. Доказательство предложения 4.1 переносится на этот случай без изменений и мы получаем при малых ρ асимптотику $h(T) = -(d-1) \ln \rho + O(1)$ и $h(\{S^t\}) = -\text{const} \rho \ln \rho + O(\rho)$, где $\text{const} = r^{d-1} (d-1) |B^{d-1}|$.

4.2. Несколько сферических рассеивателей. Пусть имеется несколько рассеивателей радиусов r_1, r_2, \dots, r_m . Обозначим для краткости $Z_0 = r_1^{d-1} + \dots + r_m^{d-1}$ и $Z_1 = r_1^{d-1} \ln r_1 + \dots + r_m^{d-1} \ln r_m$.

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Если все радиусы r_i достаточно малы, то энтропия производного отображения T равна*

$$h(T) = -(d-1) [\ln Z_0 + Z_1/Z_0] + O(1), \quad (4.5)$$

а энтропия фазового потока равна

$$h(\{S^t\}) = -\text{const} [Z_0 \ln Z_0 + Z_1] + O(Z_0), \quad (4.6)$$

где $\text{const} = (d-1) |B^{d-1}|$.

Доказательство предложения 4.3 принципиально не отличается от приведенного выше для предложения 4.1. Укажем лишь на разницу в отдельных формулах.

В рассматриваемом случае $\langle \tau \rangle = c_\nu/c_\mu \sim |B^{d-1}| Z_0$ и поэтому $\ln \langle \tau \rangle = \ln Z_0 + O(1)$. Далее, оператор Θ_1 записывается в виде $\Theta_1 = (r(x))^{-1} \tilde{\Theta}_1$, где $r(x)$ — радиус рассеивателя, к которому прикреплена точка x . Поэтому

$$h(T) = \langle \ln \det [(r(x))^{-1} \tau (\tilde{\Theta}_1 + r(x) \tau^{-1} I + r(x) \Delta_{\mathcal{B}})] \rangle =$$

$$= (d-1) [-\langle \ln r(x) \rangle + \langle \ln \tau \rangle] + \Delta_h.$$

Прямые расчеты показывают, что $\langle \ln r(x) \rangle = Z_1/Z_0$. На этом расхождении в доказательстве предложений 4.1 и 4.3 кончаются.

4.3. Выпуклые несферические рассеиватели. Заменяем сферические рассеиватели на выпуклые рассеиватели произвольной формы. Будем гомотетично сжимать каждый из них с общим масштабным множителем ε , $\varepsilon \rightarrow 0$. В этом случае при малых ε энтропия производного отображения равна $h(T) = -d(d-1) \ln \varepsilon + O(1)$, а энтропия фазового потока равна $h(\{S^t\}) = -\text{const } \varepsilon^{d-1} \ln \varepsilon + O(\varepsilon^{d-1})$. Доказательства этих формул проходят аналогично предложениям 4.1 и 4.3 и мы не будем приводить детали.

§ 5. Энтропия стадиона Бунимовича и близких систем

Л. А. Бунимович [18] ввел в рассмотрение билиардную систему в области Q , ограниченной двумя параллельными отрезками длины $2a$ и двумя выпуклыми наружу полуокружностями радиуса r . Граница ∂Q является замкнутой кривой класса C^1 , но не C^2 . Этот билиард получил название «стадион». Л. А. Бунимович [18] доказал эргодичность стадиона. Его энтропия оценивалась численно в [16] и теоретически в [5, 30, 32].

Удобно рассматривать два производных отображения. Одно — T , введенное в п. 2.3. Другое — T_* , определенное на множестве $M_* = \{x = (q, v) \in M: K(q) \neq 0\}$, построенном только на двух полуокружностях. Отображение T_* сохраняет меру $dv_* = c_{v*}(v, n(q)) dq dv$, где $c_{v*} = (4\pi r)^{-1}$. Обозначим также $\tau_* = \tau_*(x)$ при $x \in M_*$ время до следующего отражения от одной из полуокружностей.

Из формулы Абрамова так же, как и п. 3.2, получаем

$$h(\{S^t\}) = h(T)/\langle \tau \rangle = h(T_*)/\langle \tau_* \rangle_*, \quad (5.1)$$

где $\langle \cdot \rangle$ и $\langle \cdot \rangle_*$ означают усреднения по мерам ν и ν_* соответственно.

Мы рассмотрим «длинные узкие» стадионы ($r \ll a$).

Предложение 5.1. Если отношение r/a достаточно мало, то

$$h(T_*) = 2/\pi \ln(a/r) + O(1), \quad (5.2)$$

$$h(T) = r/a \ln(a/r) + O(r/a), \quad (5.3)$$

$$h(\{S^t\}) = 1/\pi a \ln(a/r) + O(1/a). \quad (5.4)$$

Доказательство. Легко посчитать, что $\langle \tau \rangle = c_\nu/c_\mu = \pi r + O(r^2)$ и $\langle \tau_* \rangle_* = c_{v*}/c_\mu = 2a + r$. Сравнивая с (5.1), заключаем, что формулы (5.2)–(5.4) эквивалентны и нам будет достаточно доказать одну из них.

Докажем формулу (5.2). Введем в M_* удобные координаты: s — параметр длины дуги на полуокружностях ($0 < s < \pi r$ на одной из них и $\pi r < s < 2\pi r$ на другой) и φ — угол между векторами скорости v и нормали $n(q)$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Тогда $(v, n(q)) = \cos \varphi$ и мы можем переписать неравенства (2.12) и (3.8) в виде $-2(r \cos \varphi)^{-1} \leq \mathcal{B}(x) \leq -(r \cos \varphi)^{-1}$. Отсюда легко вывести, что

$$\frac{\tau_*}{r \cos \varphi} - 1 \leq |1 + \tau_* \mathcal{B}(x)| \leq \frac{2\tau_*}{r \cos \varphi} - 1. \quad (5.5)$$

Пространство M_* удобно разбить на две части M_*^1 и M_*^0 ; часть M_*^1 соответствует переходам с одной полуокружности на другую, а часть M_*^0 соответствует отражениям от одной и той же полуокружности. На рис. 4 в координатах (s, φ) область M_*^0 заштрихована. Легко видеть, что $\tau_* = 2r \cos \varphi$ на M_*^0 и $\tau_* \geq 2a$ на M_*^1 . Отсюда и из (5.5) вытекают оценки $0 \leq \ln |1 + \tau_* \mathcal{B}(x)| \leq \ln 3$ при $x \in M_*^0$ и $\ln |1 + \tau_* \mathcal{B}(x)| = \ln \tau_* - \ln r - \ln(\cos \varphi) + \Delta(x)$, где $|\Delta(x)| \leq \ln 2$, при $x \in M_*^1$. Обозначим $\langle f \rangle_0$ и $\langle f \rangle_1$ интегралы от функции $f(x)$ по мере ν_* на областях M_*^0 и M_*^1 соответственно. Легко посчитать, что $\nu_*(M_*^1) = 2/\pi$. Из приведенных выше оценок следует, что

$$h(T_*) = \langle \ln \tau_* \rangle_1 - 2/\pi \ln r + O(1).$$

На M_*^1 функцию $\tau_*(x)$ можно оценить из несложных геометрических соображений: $\tau_*(x) = (2a + p(x))/\sin(s/r - \varphi)$, где $0 \leq p(x) \leq 2r$. Интегрируя по M_*^1 , получаем $\langle \ln \tau_* \rangle_1 = 2\pi^{-1} \ln a + O(1)$. Это приводит нас к формуле (5.2). Предложение доказано.

З а м е ч а н и е 5.1. В работе [5] также выведена оценка энтропии $h(T)$ при $r \ll a$: $h(T) \sim \text{const} \cdot r$. Эта оценка противоречит нашей (5.3). Автор [5] использовал метод подсчета, который следует признать ошибочным.

З а м е ч а н и е 5.2. Из формул (5.2)–(5.4) видно, что лишь энтропия $h(T)$ убывает к нулю при постоянном a и $r \rightarrow 0$. Если же зафиксировать

площадь стадиона $S = 4ar + \pi r^2$, то энтропия $h(\{S^t\})$ также устремится к нулю при $r/a \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е 5.5. Формулу (5.4) можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим прямоугольник Π со сторонами a и b . К сторонам длины b приклеим цепочку примыкающих друг к другу полукругов радиуса $r \ll b$ (рис. 5). Тогда энтропия биллиарда в полученной области Q_r равна $h(\{S^t\}) = (\pi a)^{-1} \ln(a/r) + O(1)$, т. е. она стремится к бесконечности (!) при $r \rightarrow 0$ (хотя область Q_r «стремится» к прямоугольнику Π). Дело в том, что траектории биллиарда в Q_r не сходятся к траекториям биллиарда в прямоугольнике Π .

В связи с последним замечанием приведем один интересный пример.

Первый дополнительный пример. Рассмотрим произвольный многоугольник P и приклеим к каждой его стороне цепочку примыкающих друг к другу полукругов достаточно малого радиуса r . Полученную область обозначим Q_r^- (рис. 6, а). Возьмем еще один экземпляр многоугольника P и вдоль каждой его стороны вырежем цепочку примыкающих друг к другу полукругов того же радиуса r . Оставшуюся область обозначим Q_r^+ (рис. 6, б). Ясно, что Q_r^- является биллиардом Бунимовича, а Q_r^+ — биллиардом Синая.

Легко посчитать, что в обоих биллиардах $\langle \tau \rangle = c_\nu/c_\mu = 2 |P| / |\partial P| + O(r)$. Здесь $|P|$ — площадь многоугольника, а $|\partial P|$ — его периметр. В обоих биллиардах также удобно разделить M на две части: M^1 и M^0 . Для

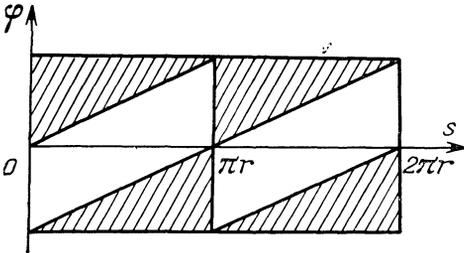


Рис. 4

Q_r^- это делается аналогично случаю стадиона, а для Q_r^+ часть M^0 соответствует переходу с любой полуокружности на одну из двух соседних с ней. В координатах (s, φ) область M^1 выглядит в случаях Q_r^- и Q_r^+ совершенно по-разному, но ее мера удивительным образом не изменяется: $\nu(M^1) = 2/\pi$. Для бильярда Q_r^- , как и для стадиона, можно вывести формулу $h(T) = -2\pi^{-1} \ln r + O(1)$. Путем незначительных модификаций этот вывод можно приложить и к бильярду в Q_r^+ (детали мы опускаем). Применяя формулу Абрамова, получаем, что энтропия бильярдов в Q_r^- и Q_r^+ равна $h(\{S^t\}) = -\text{const} \ln r + O(1)$, где $\text{const} = |\partial P|(\pi|P|)^{-1}$.

Наш результат означает, что энтропия (или скорость расходимости траекторий) в бильярдах Бунимовича и Синая указанного вида имеет одинаковую асимптотику вплоть до совпадения коэффициентов при главных

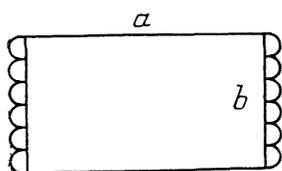


Рис. 5

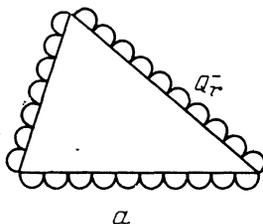
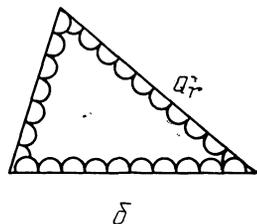


Рис. 6



членах! Иначе говоря, «возмущение» границы многоугольника как выпуклыми, так и вогнутыми дугами приводит к одинаковой степени стохастичности динамики.

Отметим также, что вместо многоугольника P можно было рассматривать любую фигуру с гладкой или кусочно-гладкой границей.

Второй дополнительный пример. Г. М. Заславский [32] исследовал интересную модификацию стадиона Бунимовича, когда вместо двух полуокружностей берутся две одинаковые дуги радиуса r , ограничивающие сегменты высоты $b < r$ (рис. 7). Мы рассмотрим положение, когда $b \ll r \ll a$. Для такого бильярда сохраняют свой смысл все обозначения, введенные выше для стадиона. Обозначим также $2p$ длину хорды, стягивающей каждую из наших дуг. В этих обозначениях $\langle \tau \rangle = c_v/c_u \approx \pi p$ и $\langle \tau_* \rangle_* = c_{v_*}/c_u \approx \pi a$. Повторяя все шаги доказательства предложения 5.1, приходим к соотношению $h(T_*) = \nu_*(M_1^*) \ln(a/r) + O(1)$. В данном

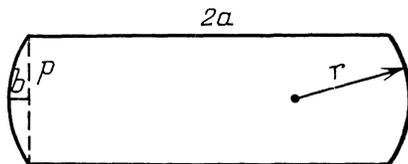


Рис. 7

случае $\nu_*(M_1^*) \rightarrow 1$ при $b/r \rightarrow 0$. Несколько более аккуратный анализ позволяет даже уточнить эту формулу: $h(T_*) = \ln(a/r) + \text{const} + o(1)$, где $\text{const} = 1 + \ln 2$ (но деталей мы приводить не будем). Отсюда и из формулы (5.1) легко выписываются соотношения $h(T) = \pi a^{-1} \ln(a/r) + O(p/a)$ и $h(\{S^t\}) = (\pi a)^{-1} \ln(a/r) + O(1/a)$. Наши выводы подтверждают результаты [32], где на основе нестрогих рассуждений получена приближенная формула $h(T_*) \approx \ln(ab/p^2)$.

В заключение сделаем одно общее замечание.

З а м е ч а н и е. Рассмотренные нами примеры из § 4 и § 5 объединяет одно общее свойство: кривизна границы ∂Q стремится к бесконечности при

ограниченной снизу (средней) длине свободного пробега. Благодаря этому свойству скорость расходимости траекторий определяется фактически только по последнему отражению. Иными словами, поведение системы приближается к марковскому процессу («память» о всех предыдущих отражениях, кроме самого последнего, стирается). При таких условиях наш метод подсчета энтропии кажется довольно универсальным.

Имеется и качественно иной класс динамических систем. Например, если в стадионе Бунимовича $a \ll r$ (стадион приближается к кругу), то «вклад» каждого отдельного отражения (в том числе и самого последнего) в процесс экспоненциальной расходимости траекторий пренебрежимо мал. В этом случае скорость расходимости определяется, грубо говоря, по N последним отражениям, где $N \sim \sqrt{r/a}$. Энтропия данной системы и некоторых аналогичных оценена в работах М. Войтковского [30, 31], который разработал весьма универсальный метод оценки снизу энтропии гиперболических отображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов Л. М.* Об энтропии потока // ДАН СССР.— 1959.— Т. 128, № 5.— С. 873—875.
2. *Бунимович Л. А.* О бильярдах, близких к рассеивающим // Мат. сб.— 1974.— Т. 95, № 1.— С. 49—73.
3. *Бунимович Л. А.* Об убывании корреляций в динамических системах с хаотическим поведением // ЖЭТФ.— 1985.— Т. 89, вып. 4.— С. 1452—1470.
4. *Гальперин Г. А.* О системах локально взаимодействующих и отталкивающихся частиц, движущихся в пространстве // Тр. ММО.— 1981.— Т. 43.— С. 142—196.
5. *Елютин П. В.* О колмогоровской энтропии бильярда «стадион» // ДАН СССР.— 1986.— Т. 291, № 3.— С. 595—598.
6. *Колмогоров А. Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и эндоморфизмов пространств Лебега // ДАН СССР.— 1958.— Т. 119, № 5.— С. 861—864.
7. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория.— М.: Наука.— 1980.
8. *Оселедец В. И.* Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели для Ляпунова динамических систем // Тр. ММО.— 1968.— Т. 19.— С. 179—210.
9. *Синай Я. Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // УМН.— 1970.— Т. 25, вып. 2.— С. 141—192.
10. *Синай Я. Г.* Бильярдные траектории в многогранном угле // УМН.— 1978.— Т. 33, вып. 1.— С. 229—230.
11. *Синай Я. Г.* Эргодические свойства газа Лоренца // Функцион. анализ и его прил.— 1979.— Т. 13, вып. 3.— С. 46—59.
12. *Синай Я. Г., Чернов Н. И.* Энтропия газа твердых сфер по отношению к группе пространственно-временных сдвигов // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1982.— Вып. 8.— С. 218—238.
13. *Синай Я. Г., Чернов Н. И.* Эргодические свойства некоторых систем двумерных дисков и трехмерных шаров // УМН.— 1987.— Т. 42, вып. 3.— С. 153—174.
14. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— Т. 2.— М.: Изд-во ВИНТИ.— 1985.*
15. *Чернов Н. И.* Построение трансверсальных следов в многомерных полурассеивающих бильярдах // Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, вып. 4.— С. 35—46.
16. *Benettin G., Strelcyn J.-M.* Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: Stochastic transition and entropy // Phys. Rev. A.— 1978.— V. 17, № 2.— P. 773—785.
17. *Bouchaud J.-P., Le Doussal P.* Numerical study of a d -dimensional periodic Lorentz gas with universal properties // J. Stat. Phys.— 1985.— V. 41, № 1, 2.— P. 225—248.
18. *Bunimovich L. A.* On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // Comm. Math. Phys.— 1979.— V. 65, № 3.— P. 295—312.
19. *Federer H.* Curvature measures // Trans. Amer. Math. Soc.— 1959.— V. 93.— P. 418—491.
20. *Friedman B., Oono Y., Kubo I.* Universal behaviour of Sinai billiard systems in the small-scatterer limit // Phys. Rev. Lett.— 1984.— V. 52, № 9.— P. 709—712.

21. *Gallavotti G., Ornstein D.* Billiards and Bernoulli schemes // *Comm. Math. Phys.*— 1974.— V. 38, № 2.— P. 83—101.
22. *Illner R.* On the number of collisions in a hard sphere particle system in all space.— Preprint / University of Victoria.— Canada, 1988.
23. *Katok A., Strelcyn J.—M.* Smooth Maps with Singularities: invariant manifolds, entropy and billiards // *Lect. Notes Math.*— 1987.— V. 1222.
24. *Krámli A., Simányi N., Szósz D.* Ergodic properties of semidispersing billiards: 1. Two cylindrical scatterers in the 3D torus // *Nonlinearity.*— 1989.— V. 2, № 2.— P. 311—326.
25. *Krámli A., Simányi N., Szósz D.* A 'transversal' fundamental theorem for semi — dispersing billiards // *Comm. Math. Phys.*— 1990.— V. 129, № 3.— P. 535—560.
26. *Krámli A., Simányi N., Szósz D.* Three billiard balls on the v — dimensional torus is a K -flow // *Ann. of Math.* (in press).
27. *Kubo I.* Perturbed billiard systems I // *Nagoya Math. J.*— 1976.— V. 61.— P. 1—57.
28. *Markarian R.* Billiards with Pesin region of measure one // *Comm. Math. Phys.*— 1988.— V. 118, № 1.— P. 87—97.
29. *Sinai Ya. G.* Entropy per particle for the dynamical system of hard spheres.— Preprint / Harvard University, 1978.
30. *Wojtkowski M.* Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents // *Comm. Math. Phys.*— 1986.— V. 105, № 3.— P. 391—414.
31. *Wojtkowski M.* Measure theoretic entropy of the system of hard spheres // *Ergod. Theory Dyn. Syst.*— 1988.— V. 8, № 1.— P. 133—153.
32. *Zaslavsky G. M.* Stochasticity in Quantum Systems // *Phys. Rep.*— 1981.— V. 80, № 3.— P. 157—250.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступило в редакцию
27 сентября 1990 г.