УДК 519.85

Член-корреспондент НАН Украины Ю.Г.Стоян,

А.Н.Панкратов, Т.Е.Романова, Н.И.Чернов

ПОЛНЫЙ КЛАСС Ф-ФУНКЦИЙ ДЛЯ БАЗОВЫХ ДВУМЕРНЫХ φ-ОБЪЕКТОВ

Фундаментальной основой математического моделирования оптимизационных задач упаковки и раскроя [1] является аналитическое описание отношений включения, пересечения, касания геометрических объектов. В статье [2] приводится достаточно полный обзор и сравнение современных методов моделирования отношений двумерных геометрических объектов. Наиболее эффективным средством является метод Ф-функций [3,4,5,7].

Пусть $A \subset R^2$ и $B \subset R^2$ – замкнутые φ-объекты [3,4], граница которых задана последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых, здесь R^2 – двумерное арифметическое евклидово пространство. Допускаются аффинные отображения множеств A и B в пространстве R^2 типа трансляции и поворота. Здесь и далее полагаем, что положение объекта A в пространстве R^2 определяет вектор $u = (x_t, y_t, \theta)$, а координаты точек $(x, y) \in A$ определяются по формуле

$$x = x_0 \cdot \cos\theta + y_0 \cdot \sin\theta + x_t,\ \ y = -x_0 \cdot \sin\theta + y_0 \cdot \cos\theta + y_t,$$

где (x_0, y_0) – произвольная точка объекта A в собственной системе координат объекта A, θ – угол поворота, (x_t, y_t) – вектор трансляции объекта A в пространстве R^2.

В [4] показано, что множества A и B (рис.1) всегда могут быть представлены в виде

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_p\,,\ B = B_1 \cup \ldots \cup B_q\,, \qquad (1)$$

где $\operatorname{int} A_i \bigcap \operatorname{int} B_j = \varnothing$, $i \in I_p = \{1, 2, ..., p\}$, $j \in I_q$, $i \neq j$, A_i, B_j принадлежат семейству базовых объектов $\Im = \{K, D, H, V\}$. Здесь K – выпуклый многоугольник, заданый вершинами (x_i, y_i), $i=1,\ldots,m$, против часовой стрелки, а стороны K – уравнениями

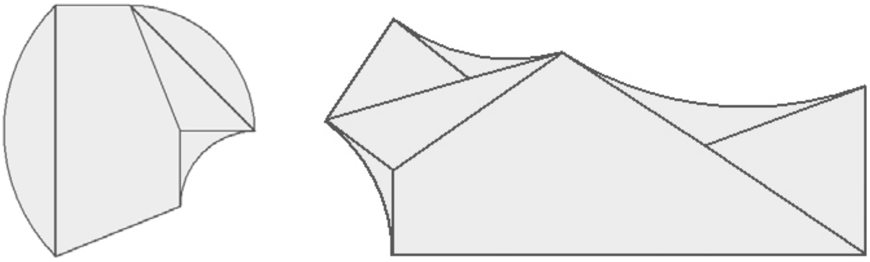
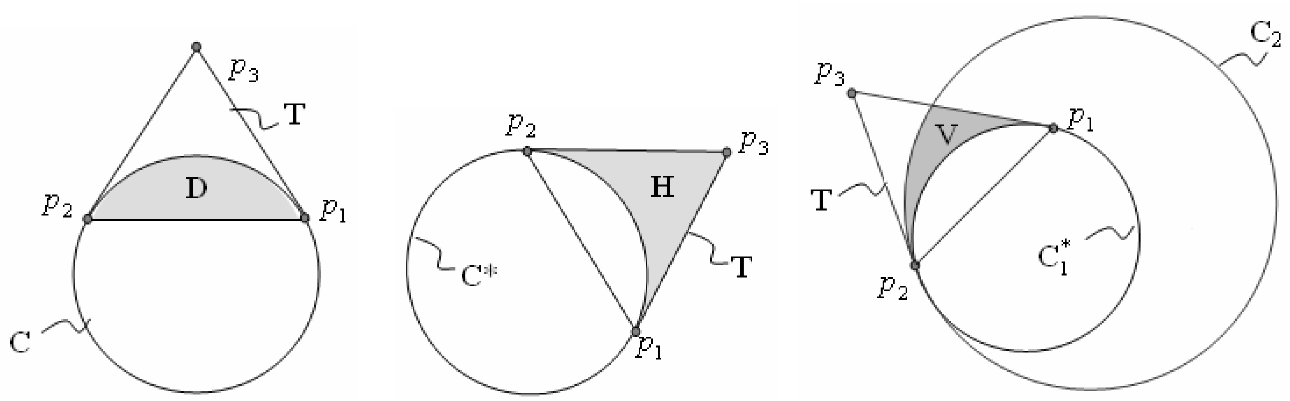


Рис.1. Объекты А и В

$\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i = 0$, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1$; $D = T \bigcap C$ (рис.2а), T – треугольник, заданный вершинами $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, C – круг радиуса r с центром (x_c, y_c), $p_1 = (x_1, y_1)$ и $p_2 = (x_2, y_2)$ – концевые точки хорды сегмента D; $H = T \bigcap C^*$ (рис.2б), $C^* = R^2 \setminus \operatorname{int} C$, $T = conv\{H\}$; $V = T \bigcap C_1^* \bigcap C_2$ (рис.2в), где C_2 – круг радиуса $r_2 > r_1$, при этом $\Phi^{C^* C} = 0$, $\Phi^{C^* C}$ – Ф-функция C_2^* и C_1 [4, 7]. Подробное описание объектов семейства $\Im$ и метод декомпозиции произвольных φ-объектов на базовые приведены в работах [4, 6].



а б в

Рис 2. Базовые объекты D, H, V

Как известно [4,5], Ф-функция для объектов A и B вида (1) определена так:

$$\Phi^{AB}(u_A, u_B) = \min\{\Phi_{ij}(u_A, u_B), i \in I_p,\ j \in I_q\}, \tag{2}$$

где Φ_{ij} – Ф-функция для множеств $A_i \in \Im$, $B_j \in \Im$.

Из (2) следует, что для построения функции Φ^{AB} необходимо построить полный класс Ф-функций $\Phi\Im$ для множеств из семейства $\Im$, т.е. $\Phi\Im = \{\Phi^{KK}, \Phi^{KH}, \Phi^{KD}, \Phi^{KV}, \Phi^{DD}, \Phi^{DH}, \Phi^{DV}, \Phi^{HH}, \Phi^{HV}, \Phi^{VV}\}$. Более того, поскольку для эффективного решения класса задач упаковки и раскроя используются градиентные методы оптимизации, Ф-функция $\Phi^{AB}(u_A, u_B)$, а следовательно и $\Phi_{ij} \in \Phi\Im$ должна быть свободной от радикалов.

Определим каждую Ф-функцию из класса $\Phi\Im$.

Прежде всего, рассмотрим Ф-функции для выпуклых объектов $E \in \{K, C\}$

$$\Phi^{DE} = \max\{\Phi^{CE}, \Phi^{TE}\}, \tag{3}$$

где Ф-функции Φ^{TK} (в общем случае Φ^{KK}) и Φ^{CC} приведены в [4,5,7], а Φ^{CK} (Φ^{KC}) определена так:

$$\Phi^{CK} = \max_{i=1,\dots,m} \max\{\alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i - r, \psi_i\}, \tag{4}$$

$$\psi_i = \min\{(x_C - x_i)^2 + (y_C - y_i)^2 - r^2,$$
$$(\beta_{i-1} - \beta_i)(x_C - x_i) - (\alpha_{i-1} - \alpha_i)(y_C - y_i) + r(\alpha_{i-1}\beta_i - \alpha_i\beta_{i-1})\}.$$

Ф-функция для двух сегментов $D_i = C_i \cap T_i$, $i = 1, 2$, имеет вид

$$\Phi^{DD} = \max\{\Phi^{C_1C_2}, \Phi^{C_1T_2}, \Phi^{T_1C_2}, \Phi^{T_1T_2}\}. \tag{5}$$

Прежде, чем построить Ф-функции для невыпуклых базовых объектов, определим Ф-функции для пар объектов C^* и H; C^* и D.

Ф-функция для C^* и H имеет вид

$$\Phi^{C^*H} = \min_{i=1,\dots,3} ({r_C}^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2),$$

где (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ – вершины треугольника $T = conv\{H\}$, здесь $conv\{\cdot\}$ – выпуклая оболочка множества $\{\cdot\}$.

Далее полагаем $D=T\bigcap C'$, где C' круг радиуса $r_{C'}$ с центром $(x_{C'}, y_{C'})$. Тогда, если $r_{C'} \geq r_C$, имеем $\Phi^{C^*D}=\psi_0$, где

$$\psi_0=\min_{i=1,\dots,2}(r_C{}^2-(x_C-x_i)^2-(y_C-y_i)^2). \tag{6}$$

Если $r_{C'}<r_C$, то

$$\Phi^{C^*D}=\min\{\psi_0,\max\{\psi_1,\chi_1,-\chi_2\}\}, \tag{7}$$

где ψ_0 определяется (6), $\chi_i=(x_{C'}-x_C)(y_i-y_{C'})-(y_{C'}-y_C)(x_i-x_{C'})$, $i=1,2$,

$$\psi_1=\Lambda\cdot\Phi^{C^*C'},\ \Lambda=\frac{r_C^2}{(r_C-r_{C'})^2}.$$

Далее рассмотрим объекты K и H. Для $H=T\bigcap C^*$ введем множество $G=C^*\bigcap P$, где $P=\{\alpha x+\beta y+\gamma\geq 0\}$, $T\subset P$, тогда $H=G\bigcap T$ (рис.3а).

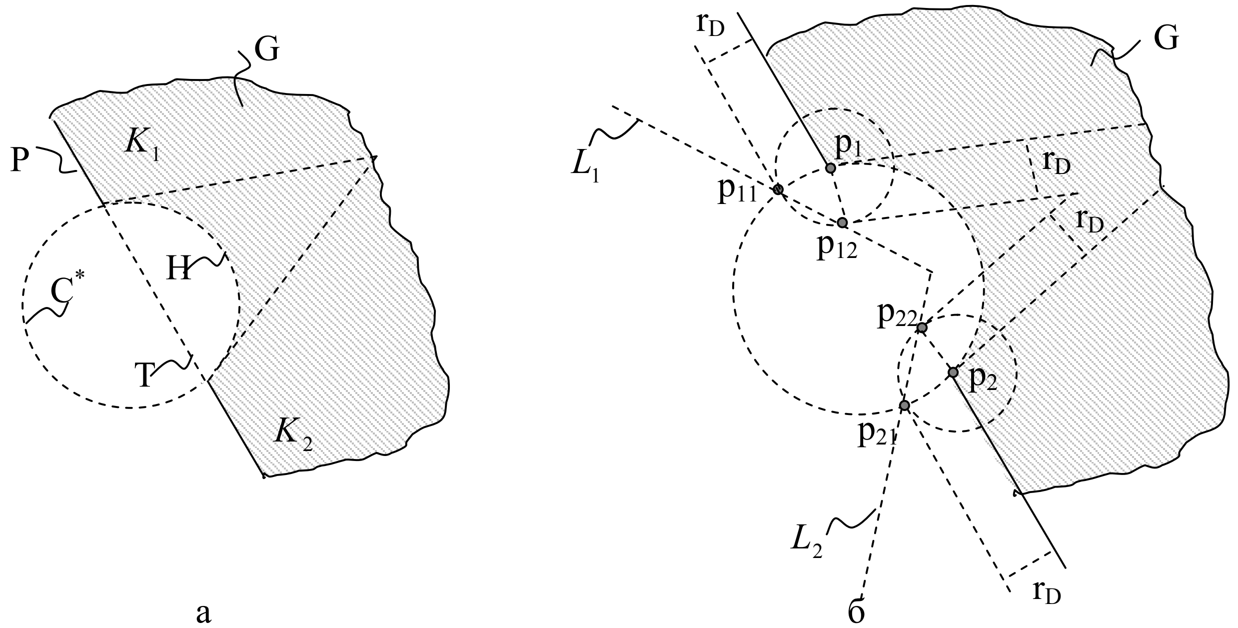


Рис 3. Объекты $H=G\bigcap T$ и G

Если E – любой выпуклый φ-объект, то $\Phi^{EH}=\max\{\Phi^{ET},\Phi^{EG}\}$, в частности

$$\Phi^{KH}=\max\{\Phi^{KT},\Phi^{KG}\}, \tag{8}$$

где

$$\Phi^{KG}=\min\{\Phi^{K_1K},\Phi^{K_2K},\psi\},\tag{9}$$

здесь $\psi=\min\limits_{i=1,\dots,m}\max\{r_C{}^2-(x_C-x_i)^2-(y_C-y_i)^2,\alpha x_i+\beta y_i+\gamma\}$, r_C – радиус круга $C=R^2\setminus\operatorname{int}C^*$ (рис.3а).

Далее рассмотрим объекты D и H. Пусть $D=T_D\cap C_D$, $H=G\cap T$, $G=C^*\cap P$ и $r_D\ge r_C$, тогда Φ^{DH} определяется формулами (8)-(9) при $m=2$.

Если $r_D<r_C$, то Ф-функция для D и H определяется так

$$\Phi^{DH}=\max\{\Phi^{DT},\Phi^{DG}\},\tag{10}$$

где

$$\Phi^{DG}=\min\{\Phi^{K_1D},\Phi^{K_2D},\psi\}\tag{11}$$

здесь $\psi=\max\{\Phi^{C^*D},\Phi^{GT_D},\Phi^{GC_D}\}$, Φ^{GT_D}– Ф-функция для G и T_D; Φ^{GC_D}– Ф-функция для G и круга C_D вида

$$\Phi^{GC_D}=\max\{\Phi^{C^*C_D},\Phi^{PC_D},\min\{\omega_1,\psi_1,\omega_2,\psi_2\}\},\tag{12}$$

где $\omega_i=(x-x_i)^2+(y-y_i)^2-(r_D)^2$, $\psi_i=0$ – уравнения прямых L_i, проходящих через точки p_{i1} и p_{i2} (рис. 3б), $i=1,2$.

Пусть $H_i=G_i\cap T_i$, i=1,2, G_i=$C_i^*\cap P_i$, где P_i=$\{\alpha_i x+\beta_i y+\gamma_i\ge 0\}$, $T_i\subset P_i$.

Тогда Ф-функцию для объектов H_1 и H_2 можно определить следующим образом:

$$\Phi^{HH}=\max\{\Phi^{T_1H_2},\Phi^{T_2H_1},\Phi^{G_1H_2},\Phi^{G_2H_1},\omega\},\tag{13}$$

где Φ^{TH} определяется выражением (8), $\omega=\min\{\alpha_1x_{23}+\beta_1y_{23}+\gamma_1,\alpha_2x_{13}+\beta_2y_{13}+\gamma_2,$ $\max\limits_{i=1,2}\min\{(r_{C_1})^2-(x_{C_1}-x_{2i})^2-(y_{C_1}-y_{2i})^2,(r_{C_2})^2-(x_{C_2}-x_{1i})^2-(y_{C_2}-y_{1i})^2\}$, а Φ^{GH} задается в виде

$$\Phi^{GH}=\min\{\Phi^{K_1H},\Phi^{K_2H},\psi\},\tag{14}$$

здесь $\psi = \min\limits_{i=1,2,3} \max\{r_C{}^2 - (x_C - x_i)^2 - (y_C - y_i)^2, \alpha x_i + \beta y_i + \gamma\}$.

Далее рассмотрим Ф-функции для объекта V и объектов семейства $\Im=\{K, D, H, V\}$.

Пусть $V=H_V \cap W$ (рис.4), где $W=D \cup T$, T – треугольник с вершинами p_1, p_2, p_3, D – сегмент с концевыми "вершинами" p_2, p_3 .

Ф-функция для объектов V и K зададим так:

$$\Phi^{VK} = \max\{\Phi^{HK}, \Phi^{WK}\}, \tag{15}$$

где $\Phi^{WK} = \min\{\Phi^{DK}, \Phi^{TK}\}$.

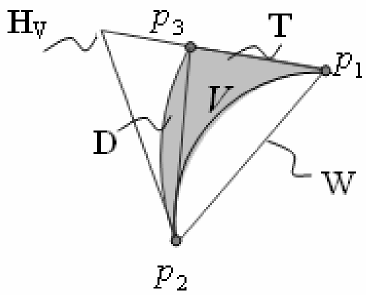


Рис 4. Объект $V=H_V \cap W$

Ф-функция для пар объектов V и D , V и H , определяется аналогично

$$\Phi^{VD} = \max\{\Phi^{HD}, \Phi^{WD}\}, \tag{16}$$

$$\Phi^{VH} = \max\{\Phi^{H_V H}, \Phi^{WH}\}, \tag{17}$$

где $\Phi^{WD} = \min\{\Phi^{DD}, \Phi^{TD}\}$, $\Phi^{WH} = \min\{\Phi^{DH}, \Phi^{TH}\}$.

Пусть V_i, i=1,2, где $V_i = H_i \cap W_i$, $W_i = D_i \cup T_i$ тогда Ф-функция для V_1 и V_2 примет вид:

$$\Phi^{VV} = \max\{\Phi^{H_1 H_2}, \Phi^{H_1 W_2}, \Phi^{H_2 W_1}, \Phi^{W_1 W_2}\}, \tag{18}$$

где $\Phi^{WW} = \min\{\Phi^{D_2 D_1}, \Phi^{T_2 T_1}, \Phi^{D_2 T_1}, \Phi^{D_1 T_2}\}$ – Ф-функция для объектов $W_1 = D_1 \cup T_1$ и $W_2 = D_2 \cup T_2$.

Таким образом, формулы (3)-(18) описывают полный класс Ф-функций для базовых объектов семейства $\Im$.

Из (1)-(18) вытекает следующее утверждение.

Теорема. Для замкнутых φ-объектов A и B, границы которых формируются объединением дуг окружностей и отрезков прямых всегда существует свободная от радикалов Ф-функция.

Следует отметить, что для формирования Ф-функций используются только бесконечно дифференцируемые тригонометрические функции.

Рассмотрим пример построения Ф-функции произвольных φ-объектов, граница которых задана последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых**.**

Имеются объекты A и B, приведенные на рисунке 1. После применения алгоритма декомпозиции [6] имеем $A = A_1 \cup \ldots \cup A_5$ и $B = B_1 \cup \ldots \cup B_7$. Тогда Ф-функция Φ^{AB} примет вид $\Phi^{AB} = \min\{\Phi_{11}, \Phi_{21}, \ldots, \Phi_{57}\}$, где $\Phi_{ij} \in \{\Phi^{KK}, \Phi^{DK}, \Phi^{HK}, \Phi^{HD}, \Phi^{HH}\}$.

Результаты данных иследований могут быть использованы при решении 2D-задач упаковки и раскроя [1,2,8].

Литература

1. Wäscher, G., Haußner, H. and Schumann, H., “An improved typology of cutting and packing problems”, European Journal of Operational Research, Volume 183, Issue 3, 16, 2007, pp. 1109-1130.

2. J. A. Bennell and J. F. Oliveira, The geometry of nesting problems: A tutorial, European J. Operational Research, 184 (2008), pp. 397-415.

3. Stoyan Yu. G. Φ-function and its basic properties// Доп. НАН України. - 2001. - № 8. - С. 112-117.

4. N. Chernov ,Y. Stoyan, T. Romanova, Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem/ Computational Geometry: Theory and Applications, vol. 43:5 (2010), pp. 535-553.

5. J. Bennell, G. Scheithauer, Yu. Stoyan, and T. Romanova, Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems, J. Annals of Operations Research, Publisher Springer Netherlands, ISSN 0254-5330 (Print) 1572-9338 (Online), 2008.

6. Н.И. Гиль, Т.Е. Романова, М.В. Злотник, Декомпозиция двумерных геометрических объектов. Доп. НАН України. – 2010. – № 4.

7. Yu. Stoyan, J. Terno, G. Scheithauer, N. Gil, and T. Romanova, Phi-functions for primary 2D-objects, Studia Informatica Universalis, 2(2001), pp. 1-32.

8. E. Burke, R. Hellier, G. Kendall, and G. Whitwell, A New Bottom-Left-Fill Heuristic Algorithm for the Two-Dimensional Irregular Packing Problem, Operations Research, 54 (2006), pp. 587-601.