

УДК 519.85

© 2010

Член-корреспондент НАН Украины Ю.Г.Стоян,

Т.Е.Романова, Н.И.Чернов

## АДАПТИВНЫЕ Ф-ФУНКЦИИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

При построении математических моделей оптимизационных задач упаковки и раскроя [1] возникает необходимость в формализации ограничений на допустимые расстояния между геометрическими объектами. Применение нормализованных Ф-функций [2] иногда приводит к сложным вычислительным процедурам. Цель данной работы – построение Ф-функций, свободных от радикалов, учитывающих допустимые расстояния между двумерными объектами.

Имеются замкнутые ограниченные  $\varphi$ -объекты  $A, B \subset R^2$  [3]. Полагаем, что граница объекта  $A$  (или  $B$ ) задана последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых, здесь  $R^2$  – двумерное арифметическое евклидово пространство. Допускаются аффинные отображения трансляции и поворота  $A$  и  $B$ . Положение  $A$  (или  $B$ ) в пространстве  $R^2$  определяет вектор  $u = (x_t, y_t, \theta)$ , а координаты точек  $(x, y) \in A$  (или  $(x, y) \in B$ ) определяются по формуле  $x = x_0 \cdot \cos \theta + y_0 \cdot \sin \theta + x_t$ ,  $y = -x_0 \cdot \sin \theta + y_0 \cdot \cos \theta + y_t$ , где  $(x_0, y_0)$  – произвольная точка объекта  $A$  (или  $B$ ) в собственной системе координат объекта  $A$  (или  $B$ ),  $\theta$  – угол поворота,  $(x_t, y_t)$  – вектор трансляции объекта  $A$  (или  $B$ ) в пространстве  $R^2$ .

Пусть задано ограничение на минимально допустимое расстояние  $\rho^-$  между объектами  $A$  и  $B$ , т.е.  $\text{dist}(A, B) \geq \rho^-$ , где  $\text{dist}(A, B) = \min_{a \in A, b \in B} d(a, b)$ ,  $d(a, b)$  –

евклидово расстояние в  $R^2$ . В терминах Ф-функций это ограничение можно описать

в виде  $\tilde{\Phi}^{AB} \geq \rho^-$ , где  $\tilde{\Phi}^{AB}$  – нормализованная Ф-функция объектов  $A$  и  $B$  [4].

Заметим, что Ф-функция объектов  $A$  и  $B$  зависит от векторов  $u^A = (x_A, y_A, \theta_A)$  и

$u^B = (x_B, y_B, \theta_B)$ .

Определим, так называемую, *адаптивную*  $\Phi$ -функцию  $\widehat{\Phi}^{AB}$ , такую, что  $\widetilde{\Phi}^{AB} = \rho^-$  влечет  $\widehat{\Phi}^{AB} = 0$ .

Тогда справедливо соотношение

$$\text{dist}(A,B) \geq \rho^- \Leftrightarrow \widehat{\Phi}^{AB} \geq 0. \quad (1)$$

Рассмотрим множество  $\widehat{A} = A \oplus C(\rho^-)$ , где  $C(\rho^-)$  – круг радиуса  $\rho^-$  с центром в начале собственной системы координат множества  $A$ ,  $\oplus$  – символ операции суммы Минковского [5]. Тогда, полагаем  $\widehat{\Phi}^{AB} = \Phi^{\widehat{A}B}$ , где  $\Phi^{\widehat{A}B}$  –  $\Phi$ -функция объектов  $\widehat{A}$  и  $B$ .

В [3] показано, что всегда существует свободная от радикалов  $\Phi$ -функция для двух произвольных  $\varphi$ -объектов, граница которых описывается последовательностью отрезков прямых и дуг окружностей, в частности, для  $\widehat{A}$  и  $B$ , которая может быть определена как

$$\Phi^{\widehat{A}B} = \min\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{\widehat{n}}\}, \quad (2)$$

где  $\Phi_i$ ,  $i=1, \dots, \widehat{n}$ ,  $\widehat{n}$  – число пар базовых объектов [3], полученных в результате декомпозиции объектов  $\widehat{A}$  и  $B$ . В этом случае для определения  $\Phi$ -функции (2) необходимо построение множества  $\widehat{A}$  в явном виде.

Один из очевидных методов формирования множества  $\widehat{A}$  есть построение эквидистанты для границы множества  $A$ , используя, например, алгоритмы [6, 7]. В пределах данного исследования предлагается также иной подход, учитывающий особенности построения  $\Phi$ -функций для  $\varphi$ -объектов, границы которых описываются дугами окружностей и отрезками прямых.

В [3] приведено утверждение о том, что объект  $A$  всегда может быть представлен в виде

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_p, \quad (3)$$

где  $\text{int } A_i \cap \text{int } A_j = \emptyset$ ,  $i, j \in I_p = \{1, 2, \dots, p\}$ ,  $i \neq j$ ,  $A_i, A_j \in \mathfrak{S} = \{K, D, H, V\}$ ,  $\text{int}(\cdot)$  – внутренность множества  $(\cdot)$ ,  $K$  – выпуклый многоугольник, заданный вершинами  $p_i$

$= (x_i, y_i), i=1, \dots, m; D = C \cap T$  – круговой сегмент,  $T = \text{conv}\{p_1, p_2, p_3\}$ ,  $C$  – круг радиуса  $r$  с центром  $(x_c, y_c)$ ,  $p_1$  и  $p_2$  – концевые точки хорды сегмента  $D$ ;  $H = T \cap C^*$ ,  $C^* = R^2 \setminus \text{int } C$ ,  $T = \text{conv}\{H\}$ , заданный вершинами  $p_i = (x_i, y_i), i=1, 2, 3$ ;  $V = T \cap C_1^* \cap C_2$ , где  $C_2$  – круг радиуса  $r_2 > r_1$ , при этом  $\Phi^{C^*C} = 0$ ,  $\Phi^{C^*C}$  –  $\Phi$ -функция  $C_2^*$  и  $C_1$  [8].

Из этого утверждения следует, что множество  $\widehat{A}$  всегда может быть задано так:

$$\widehat{A} = \widehat{A}_1 \cup \dots \cup \widehat{A}_p, \quad (4)$$

где  $\widehat{A}_i \in \widehat{\mathfrak{Z}} = \{\widehat{K}, \widehat{D}, \widehat{H}, \widehat{V}\}$ ,  $\widehat{A}_i = A_i \oplus C(\rho^-)$ .

Учитывая (4), определим  $\Phi$ -функцию для  $\widehat{A}$  и  $B$  в виде

$$\widehat{\Phi}^{AB} = \min\{\Phi_{ij}, i \in I_p, j \in I_q\}, \quad (5)$$

где  $\Phi_{ij}$  –  $\Phi$ -функция для множеств  $\widehat{A}_i \in \widehat{\mathfrak{Z}}, B_j \in \mathfrak{Z}$ .

Из (4) следует необходимость построения полного класса адаптивных  $\Phi$ -функций  $\widehat{\Phi}^{AB}$  для множеств  $A$  и  $B$  из семейства базовых объектов  $\mathfrak{Z}$ , что эквивалентно построению класса  $\Phi$ -функций  $\widehat{\Phi}^{AB}$  для всех пар множеств  $\widehat{A} \in \widehat{\mathfrak{Z}}$  и  $B \in \mathfrak{Z}$ .

Осуществим декомпозицию каждого объекта  $\widehat{A} \in \widehat{\mathfrak{Z}}$ , используя алгоритм [9]. Заметим, что результат декомпозиции объектов  $\widehat{K}$  и  $\widehat{D}$  может быть однозначно определен так (рис. 1):  $\widehat{K} = \bigcup_{i=1}^m D_i \cup K$ , где  $K = \text{conv}\{\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_{2m}\}$ ;  $\widehat{D} = \bigcup_{i=1}^3 D_i \cup K$ , где

$K = \text{conv}\{\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_4\}$ .

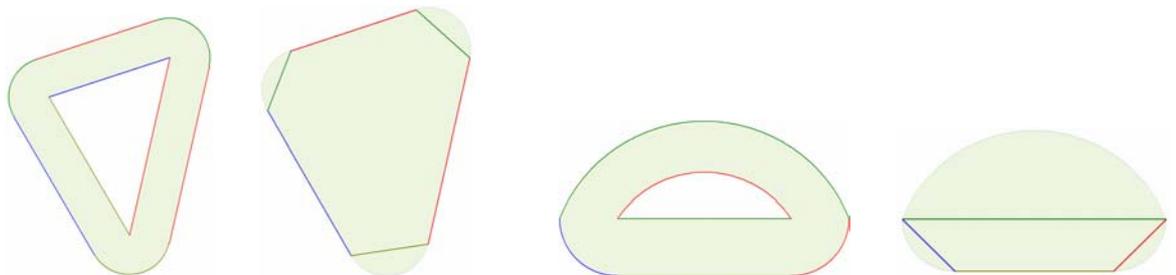


Рис.1. Декомпозиция объектов  $\widehat{K}$  и  $\widehat{D}$

В случае декомпозиции объектов  $\widehat{A} \in \{\widehat{H}, \widehat{V}\}$  на базовые объекты из множества  $\mathfrak{S}$ , в зависимости от соотношений  $\rho^-$  и  $r$ , а также размерности угла  $\alpha$ , имеем:

$$\widehat{H} = \bigcup_{i=1}^3 D_i \cup K, \text{ где } K = \text{conv}\{\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_5\}, \text{ (рис. 2а), если } \rho^- > r, \alpha \leq 90^\circ;$$

$$\widehat{H} = \bigcup_{i=1}^5 D_i \cup K_1 \cup K_2, \text{ где } K_1 = \text{conv}\{\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_4\}, K_2 = \text{conv}\{\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_5\}, \text{ (рис. 2б), если}$$

$$\rho^- = r, \quad \alpha \leq 90^\circ; \quad \widehat{H} = \bigcup_{i=1}^5 D_i \cup H \cup K_1 \cup K_2, \quad \text{где } K_1 = \text{conv}\{\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_6\},$$

$K_2 = \text{conv}\{\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_5\}$ , (рис. 2в), если  $\rho^- < r$  для любого  $\alpha$ ;

$$\widehat{H} = \bigcup_{i=1}^5 D_i \cup K, \text{ где } K = \text{conv}\{\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_7\}, \text{ (рис. 2г), если } \rho^- \geq r, \alpha > 90^\circ$$

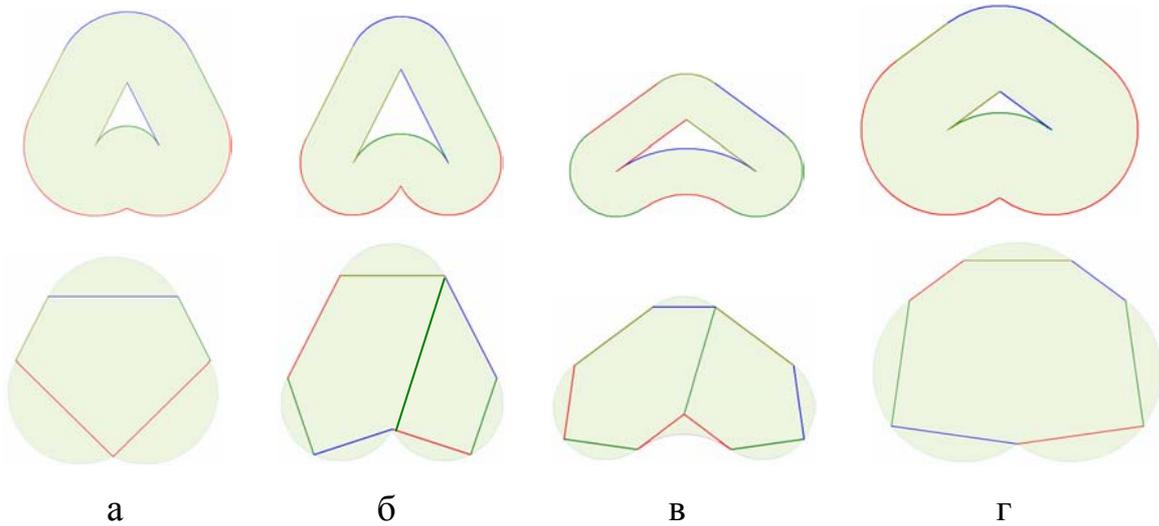


Рис.2. Декомпозиция объектов  $\widehat{H}$

$$\widehat{V} = \bigcup_{i=1}^6 D_i \cup H \cup K_1 \cup K_2, \text{ где } K_1 = \text{conv}\{\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_6\}, K_2 = \text{conv}\{\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_5\}, \text{ (рис. 3а.), если}$$

$$\rho^- < r, \quad \widehat{V} = \bigcup_{i=1}^6 D_i \cup K, \text{ где } K = \text{conv}\{\widehat{p}_1, \dots, \widehat{p}_7\}, \text{ (рис. 3б.), если } \rho^- \geq r.$$

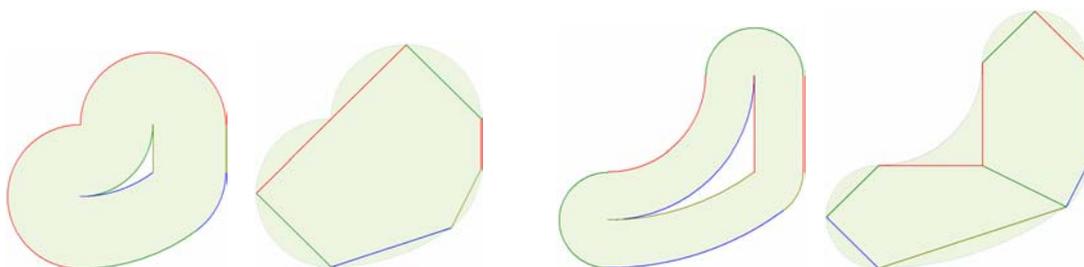


Рис.3. Декомпозиция объектов  $\widehat{V}$ 

Тогда для  $B \in \mathfrak{Z}$ , имеем

$$\Phi^{\widehat{KB}} = \min \{ \Phi^{KB}, \Phi^{D_i B}, i=1, \dots, m \}; \quad (6)$$

$$\Phi^{\widehat{DB}} = \min \{ \Phi^{KB}, \Phi^{D_i B}, i=1, 2, 3 \}; \quad (7)$$

$$\Phi^{\widehat{HB}} = \min \{ \Phi^K, \Phi^{D_i B}, i=1, 2, 3 \}, \text{ если } \rho^- > r, \alpha \leq 90^\circ, \quad (8)$$

$$\Phi^{\widehat{HB}} = \min \{ \Phi^{K_j}, j=1, 2, \Phi^{D_i B}, i=1, \dots, 5 \}, \text{ если } \rho^- = r, \alpha \leq 90^\circ,$$

$$\Phi^{\widehat{HB}} = \min \{ \Phi^{HB}, \Phi^{K_j B}, j=1, 2, \Phi^{D_i B}, i=1, \dots, 5 \}, \text{ если } \rho^- < r \text{ для любого } \alpha,$$

$$\Phi^{\widehat{HB}} = \min \{ \Phi^K, \Phi^{D_i B}, i=1, \dots, 5 \}, \text{ если } \rho^- \geq r, \alpha > 90^\circ;$$

$$\Phi^{\widehat{VB}} = \min \{ \Phi^{KB}, \Phi^{D_i B}, i=1, \dots, 6 \}, \text{ если } \rho^- \geq r, \quad (9)$$

$$\Phi^{\widehat{VB}} = \min \{ \Phi^{HB}, \Phi^{K_j B}, j=1, 2, \Phi^{D_i B}, i=1, \dots, 6 \}, \text{ если } \rho^- < r. \quad (10)$$

Таким образом, формулы (6)-(10) описывают полный класс адаптивных  $\Phi$ -функций  $\widehat{\Phi}^{AB}$  для базовых объектов  $A, B \in \mathfrak{Z}$ .

Из (1)-(10) следует справедливость следующего утверждения.

**Теорема.** Для  $\varphi$ -объектов  $A$  и  $B$ , границы которых формируются последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых всегда существует свободная от радикалов адаптивная  $\Phi$ -функция  $\widehat{\Phi}^{AB}$ , учитывающая минимально допустимые расстояния между объектами  $A$  и  $B$ .

Таким образом,  $\Phi$ -функция  $\widehat{\Phi}^{AB}$  (5) для множеств  $A$  и  $B$  может быть определена как  $\Phi$ -функция  $\Phi^{\widehat{AB}}$  для множеств  $\widehat{A} = \widehat{A}_1 \cup \dots \cup \widehat{A}_p$ ,  $B = B_1 \cup \dots \cup B_q$ ,  $\widehat{A}_i \in \widehat{\mathfrak{Z}}$ ,  $B_j \in \mathfrak{Z}$ ,  $i \in I_p$ ,  $j \in I_q$ , вида

$$\Phi^{\widehat{AB}} = \min \{ \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n \},$$

где  $\Phi_i \in \Phi^{\mathfrak{Z}} = \{\Phi^{KK}, \Phi^{DK}, \Phi^{HK}, \Phi^{VK}, \Phi^{DH}, \Phi^{HH}, \Phi^{VH}, \Phi^{DD}, \Phi^{DV}, \Phi^{VV}\}$ ,

$n = q \cdot \sum_{i=1}^p n_i$ ,  $n_i$  – число базовых объектов  $A_{il} \in \mathfrak{Z}$ , формирующих декомпозицию

объектов  $\widehat{A}_i \in \widehat{\mathfrak{Z}}$ ,  $\widehat{A}_i = \bigcup_{l=1}^{n_i} A_{il}$ .

*Замечание.* Для формирования  $\Phi$ -функций  $\widehat{\Phi}^{AB}$  используются только бесконечно дифференцируемые функции.

Если для пары ограниченных  $\varphi$ -объектов  $A, B \subset R^2$ , задано ограничение на максимально допустимое расстояние  $\rho^+$  между ними, т.е.  $\text{dist}(A, B) \leq \rho^+ \Leftrightarrow \widetilde{\Phi}^{AB} \leq \rho^+ \Leftrightarrow \widehat{\Phi}_+^{AB} \leq 0$ , то адаптивная  $\Phi$ -функция  $\widehat{\Phi}_+^{AB}$ , учитывающая максимально допустимые расстояния строится аналогично предложенному выше подходу.

**Теорема.** Для  $\varphi$ -объектов  $A$  и  $B$ , границы которых формируются последовательностью дуг окружностей и отрезков прямых всегда существует свободная от радикалов адаптивная  $\Phi$ -функция  $\widehat{\Phi}_+^{AB}$ , учитывающая максимально допустимые расстояния между объектами  $A$  и  $B$ .

Ограничение  $\rho^- \leq \text{dist}(A, B) \leq \rho^+$  может быть задано системой неравенств вида  $\{\widehat{\Phi}^{AB} \geq 0, \widehat{\Phi}_+^{AB} \leq 0\}$ .

## Литература

1. Wäscher, G., Haußner, H. and Schumann, H., An improved typology of cutting and packing problems, European Journal of Operational Research, Volume 183, Issue 3, 16, 2007, pp. 1109-1130.
2. Stoyan, YG, Chugay, A., (2008), “Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them”, European J. Oper. Res., 197, 446–455.
3. N. Chernov, Y. Stoyan, T. Romanova, Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem/ Computational Geometry: Theory and Applications, vol. 43:5 (2010), pp. 535-553.

4. J. Bennell, G. Scheithauer, Yu. Stoyan, and T. Romanova, Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems, J. Annals of Operations Research, Publisher Springer Netherlands, doi:10.1007/s10479-008-0456-5.

5. Minkovski H. Dichteste gitterformige. Lagerung, in Nachr. Ges. Wiss. - Gottingen, 1904.

6. [Построение эквидистанты Rus](#)

7. [Построение эквидистанты Eng](#)

8. Stoyan, Y., Terno, J. , Scheithauer, G. , Gil, N. and Romanova, T.,(2001), Phi-functions for primary 2D-objects”, Studia Informatica Universalis 2, 1–32.

9. Н.И. Гиль, Т.Е. Романова, М.В. Злотник, Декомпозиция двумерных геометрических объектов. Доп. НАН України. – 2010. – № 7.