1987 г. май—июнь *т. 42, вып. 3(255)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.53/.57

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ДВУМЕРНЫХ ДИСКОВ И ТРЕХМЕРНЫХ ШАРОВ

Я. Г. Синай, Н. И. Чернов

§ 1. Введение

В этой работе проводится анализ эргодических свойств некоторых систем двумерных дисков и трехмерных шаров, движущихся в отсутствие внешних сил с постоянной скоростью и взаимодействующих посредством упругих столкновений. Случай двух дисков на торе был исчерпывающим образом изучен в [17].

Изложение проводится в основном для системы n дисков на торе. Необходимые изменения для системы трехмерных шаров и других систем всюду указываются.

Пусть $(q_1^{(i)}, q_2^{(i)})$ — координаты центра i-го диска, $(p_1^{(i)}, p_2^{(i)})$ — компоненты его импульса. Конфигурационным пространством Q системы n дисков одинакового радиуса r служит $2n$-мерный тор $\underbrace{\mathrm{Tor}^2\times\mathrm{Tor}^2\times\ldots\times\mathrm{Tor}^2}_{n}$, из которого выброшено объединение внутренностей $n(n-1)/2$ цилиндров, задаваемых уравнениями

$$(1)\qquad Q_{ij}\colon\ (q_1^{(i)}-q_1^{(j)})^2+(q_2^{(i)}-q_2^{(j)})^2=(2r)^2 \pmod 1,$$

$1\leqslant i<j\leqslant n$. Цилиндр Q_{ij} соответствует столкновению i-го и j-го дисков.

Система обладает первым интегралом энергии $H=\frac{1}{2}\sum (p_j^{(i)})^2$, значение которого предполагается фиксированным: $H=H_0$. Тогда фазовым пространством служит прямое произведение $\mathfrak{M}=Q\times S$, где S есть $(2n-1)$-мерная сфера импульсов, задаваемая уравнением $H=H_0$. Движение дисков порождает однопараметрическую группу преобразований $\{T^t\}$, $t\in\mathbb{R}$, пространства $\mathfrak{M}$. Инвариантная мера μ и σ-алгебра измеримых подмножеств на $\mathfrak{M}$ определяются естественным образом.

Поскольку рассматривается движение дисков на торе, то полный импульс $P=(P_1, P_2)$, $P_j=\sum\limits_{i=1}^{n} p_j^{(i)}$ $(j=1, 2)$ также служит первым интегралом системы. Значение P определяет скорость движения центра тяжести. При фиксированном $P \neq 0$ поток $\{T^t\}$ представляет собой прямое произведение условно-периодического движения центра тяжести и относительного движения дисков или шаров, соответствующего $P = 0$ и фиксированному положению центра тяжести. При некотором предположении чисто геометрического характера (см. § 3) мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $P = 0$ и положение центра тяжести фиксировано. Тогда эргодические компоненты потока $\{T^t\}$ имеют положительную меру. На каждой такой компоненте поток является K-потоком.*

Напомним (см. [10], [22]), что K-потоки эргодичны, обладают перемешиванием всех степеней, положительной энтропией и в ортогональном дополнении к одномерному подпространству констант сопряженные группы унитарных операторов имеют счетнократный лебеговский спектр. Что касается упомянутого выше геометрического предположения, то оно непосредственно проверяется при небольших значениях n ($n \leqslant 10$). Кажется несомненным, что оно выполнено при любых n, но доказательство этого пока отсутствует.

Из теоремы 1 вытекает следствие, относящееся к $P \neq 0$.

Следствие 1. *Пусть $P \neq 0$ и условно-периодический поток, отвечающий движению центра тяжести, эргодичен. Тогда при тех же условиях, что и в теореме 1, эргодические компоненты потока $\{T^t\}$ имеют положительную меру. На каждой такой компоненте поток представляет собой прямое произведение условно-периодического потока и K-потока.*

Без каких-либо дополнительных предположений справедливы

Теорема 2. *Для системы n дисков (шаров) на торе при $r \leqslant r_n$ найдется открытое подмножество $\mathcal{O}$ такое, что эргодические компоненты потока $\{T^t\}$, пересекающие существенным образом $\mathcal{O}$ (т. е. условная мера $\mathcal{O}$ на такой компоненте положительна) имеют положительную меру.*

Теорема 3. *Для системы n дисков (шаров) на торе поток $\{T^t\}$ имеет положительную энтропию.*

Система n упруго сталкивающихся дисков или шаров в области любой формы или на торе всегда сводится к системе биллиардного типа (см. [10] и следующий параграф). В случае областей с кусочно-плоской границей соответствующий биллиард является полурассеивающим, т. е. граница соответствующей области выпукла (внутрь), но не строго выпукла. Если граница строго выпукла, то такой биллиард называется рассеивающим. Рассеивающие биллиарды близки по своим свойствам к гиперболическим системам типа систем Аносова, а полурассеивающие биллиарды близки к частично гиперболическим системам (см. [7], [22]). Первый шаг в исследовании эргодических свойств подобных систем состоит в построении устойчивых и неустойчивых многообразий для «индивидуальных» точек фазового пространства. Соответствующая техника представляет собой развитие техники доказательства теоремы Адамара — Перрона и достаточно хорошо разработана (см. [1], [2], [13], [22]). В нашем случае вначале строятся касательные пространства к этим многообразиям. Такие пространства задаются операторами второй квадратичной формы проекций устойчивых и неустойчивых многообразий на конфигурационное пространство. Эти операторы представляют собой решения уравнений Якоби. В случае биллиардных систем уравнения Якоби оказываются уравнениями разностного типа. Поэтому их решения строятся в виде операторнозначных цепных дробей.

Для рассеивающих биллиардов возникающие операторы строго положительны. Для полурассеивающих биллиардов эти операторы только неотрицательны. Возникающие нулевые подпространства, как правило, связаны с существованием дополнительных первых интегралов движения.

Если для почти всех точек фазового пространства размерность положительного подпространства оператора второй квадратичной формы максимальна, то отсюда вытекает существование почти всюду локальных устойчивых и неустойчивых многообразий и абсолютная непрерывность соответствующих слоений. Если сумма размерностей устойчивого и неустойчивого многообразия меньше размерности всего рассматриваемого подмногообразия фазового пространства на единицу, то отсюда с помощью рассуждений типа рассуждений Хопфа (см. [18], [19]) следует, что эргодические компоненты имеют положительную меру, и на каждой такой компоненте поток $\{T^t\}$ является K-потоком. С помощью несколько более тонкой техники можно даже показать, что $\{T^t\}$ является B-потоком, т. е. метрически изоморфен эргодической надстройке над автоморфизмом Бернулли. Именно на этом пути доказываются теорема 1 и следствие к ней.

Дальнейшее исследование состоит в том, чтобы выяснить, когда эргодическая компонента единственна. В случае рассеивающих биллиардов этой цели служит «основная теорема теории рассеивающих биллиардов», впервые доказанная в [19]. В [8], [20] имеется два других доказательства этой теоремы. В § 4 мы приводим еще одно доказательство «основной теоремы», которое при дополнительных предположениях применимо к некоторым полурассеивающим биллиардам. На основании этой теоремы в § 5 исследуются открытые области в пространстве параметров системы $n = 3$ дисков, для которых показывается, что эргодическая компонента единственна. Построение аналогичных областей для $n > 3$ дисков сводится к прямому пересмотру ряда вырожденных возможностей, который может быть проведен с помощью ЭВМ.

Из сказанного выше видно, что результаты данной работы относятся к обоснованию эргодической гипотезы, выдвинутой более 100 лет назад Л. Больцманом (см. [6]). Эта гипотеза в современных терминах означает, что нелинейная гамильтонова система общего вида на многообразии постоянной энергии эргодична. Несомненно, что Л. Больцман относил ее к системам с большим числом степеней свободы, поскольку в его книге [6] речь шла об эргодической гипотезе в связи с основаниями статистической механики. В то время не было, конечно, понятия термодинамического предельного перехода, при котором число частиц растет пропорционально объему системы, и за единицу длины принято среднее расстояние между частицами. В математических работах А. Пуанкаре, Г. Биркгофа, Дж. фон Неймана возникли основные понятия эргодической теории, и под эргодической гипотезой стали понимать просто гипотезу об эргодичности той или иной динамической системы. При этом связь с основаниями статистической механики потеряла, по крайней мере на некоторое время, свое значение. Однако вопрос об эргодичности стал содержательным и для конечномерных динамических систем с небольшим числом степеней свободы. В связи с этим были исследованы отдельные примеры классических динамических систем, для которых была доказана эргодичность. Здесь прежде всего следует назвать геодезические потоки на компактных многообразиях отрицательной кривизны. Один из первых важных шагов был сделан Ж. Адамаром [29], результаты которого потом использовались в работах М. Морса [33], Г. Хедлунда [30] и Э. Хопфа [23], относящихся к той же теме. Геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны являются одним из основных примеров систем Аносова (см. [1], [2]). Эргодичность, перемешивание и K-свойство таких систем исследованы в настоящее время достаточно подробно (см. [1], [2], [18], [22]).

В начале пятидесятых годов возникла знаменитая теория КАМ (Колмогорова — Арнольда — Мозера (см. [3])), относящаяся к малым возмущениям интегрируемых гамильтоновых систем. Один из основных результатов этой теории состоит в том, что при достаточно общих условиях возмущенная гамильтонова система остается неэргодической на множестве положительной меры. Тем самым эргодическая теория Больцмана в ее первоначальном виде оказалась опровергнутой, но возник вопрос, какие же гамильтоновы системы, в особенности физического происхождения, являются эргодическими.

Обсуждавшиеся выше геодезические потоки на компактных многообразиях отрицательной кривизны, как и все системы Аносова, обладают характерным свойством равномерной экспоненциальной неустойчивости движения. Последнее означает, в частности, что геодезические, выходящие из одной точки, расходятся с экспоненциальной скоростью. В сороковые годы ленинградский физик Н. С. Крылов [11] заметил, что такая же экспоненциальная неустойчивость имеется и у динамических систем, отвечающих движению дисков или шаров с упругими столкновениями. Рассеивающую роль отрицательной кривизны берет на себя выпуклый внутрь край конфигурационного пространства, образованный из цилиндров типа (1). Рассуждения Н. С. Крылова нельзя воспринимать как строгие математические доказательства, однако основная идея была высказана им вполне четко: динамические системы с упругими столкновениями должны быть эргодическими в силу той же экспоненциальной неустойчивости, что и у геодезических потоков в пространствах отрицательной кривизны.

Соответствующий математически строгий результат для системы двух дисков или шаров, как уже говорилось, был получен в [19]. Трудность исследования связана с разрывным характером динамики и неравномерной неустойчивостью. Именно эти трудности и преодолеваются в последующих параграфах данной статьи для описанных выше случаев. Результаты данной статьи являются первыми и пока единственными утверждениями об эргодических свойствах систем n дисков. Ранее, до появления энтропийной теории динамических систем и теории систем с гиперболическими свойствами неустойчивости, к подобным задачам вообще не было подходов. Анонс же, сделанный в [17] для общей ситуации, следует считать преждевременным.

Параллельно с исследованием эргодичности конечномерных динамических систем шло развитие математических оснований статистической механики, при котором на первый план выступает анализ систем большого числа степеней свободы, точнее анализ свойств таких систем при термодинамическом предельном переходе. В равновесной статистической механике основную роль играют бесконечномерные динамические системы, состоящие из бесконечного числа одинаковых частиц, и специальные распределения вероятностей на их фазовых пространствах, называемые предельными распределениями Гиббса. Впервые такие системы появились в работе Н. Н. Боголюбова и Б. И. Хацета [4] (см. модифицированное изложение в [5]), а потом их теория строилась и развивалась в работах Р. Л. Добрушина [9], О. Лэнфорда и Д. Рюэлля [32], Д. Рюэлля [16] и др. Основное предположение (постулат Гиббса) равновесной статистической механики состоит в том, что бесконечномерная динамическая система статистической механики в состоянии термодинамического равновесия (т. е. в отсутствие тепловых и динамических процессов) подчиняется предельному распределению Гиббса. Теперь проблема обоснования равновесной статистической механики ставится как проблема объяснения исключительной роли таких распределений.

Один из возможных подходов к ней возникает в неравновесной статистической механике. Согласно основной идее Н. Н. Боголюбова эволюция неравновесных распределений в системах статистической механики имеет два четко выраженных различных временных масштаба. Первый масштаб, микроскопический, равен средней продолжительности свободного пробега, точнее, единице времени микроскопических движений. Считается, что за такие времена в неравновесной системе за счет столкновений устанавливается локальное равновесие. Последнее означает, что корреляционные функции на микроскопических расстояниях, т. е. расстояниях порядка среднего расстояния между частицами, близки к корреляционным функциям предельного распределения Гиббса, но параметры этого распределения не постоянны, а являются медленно меняющимися функциями в пространстве и во времени. Их эволюция происходит во втором, более медленном, гидродинамическом масштабе времени и описывается уравнениями типа уравнений гидродинамики.

Роль свойств типа эргодичности и перемешивания в течение времени установления локального равновесия очевидна. Менее очевидно, но также несомненно, что эти же свойства существенны при исследовании динамики локально-равновесных распределений. Можно надеяться, что полученные в этой статье результаты будут полезны при изучении описанных глубоких и трудных проблем кинетики сложных систем.

Мы благодарны С. П. Новикову за полезные обсуждения вопросов, рассмотренных в этой работе. Мы благодарим также Л. А. Бунимовича, А. Крамли, Д. Саса, Н. Шимани, внимательно прочитавших рукопись и сделавших много важных полезных замечаний.

§ 2. Необходимые сведения о рассеивающих и полурассеивающих биллиардах

Как уже упоминалось, система n свободно движущихся и упруго сталкивающихся дисков может быть сведена к биллиардной системе специального вида (см. [9]). Под биллиардной системой или просто биллиардом здесь понимается динамическая система, отвечающая движению материальной точки внутри ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^d$ или $Q \subset \mathrm{Tor}^d$, $d \geqslant 2$. Точка движется свободно, т. е. с постоянной скоростью, внутри Q и отражается от края ∂Q по закону «угол падения равен углу отражения». При таком движении норма вектора скорости $\| v \|$ есть первый интеграл. Конфигурационным пространством системы служит $\overline{Q} = Q \cup \partial Q$, а фазовым пространством служит $\mathfrak{M} = \overline{Q} \times S$, где S есть $(d-1)$-мерная сфера векторов скорости, для которых $\| v \| = v_0$. Точки фазового пространства обозначаются $x = (q, v)$, где $q \in \overline{Q}$, $v \in S$. Естественную проекцию $\mathfrak{M} \to \overline{Q}$ обозначим π, $\pi(q, v) = q$. Биллиард в Q порождает поток $\{T^t\}$ в $\mathfrak{M}$ (см. [10]).

Край ∂Q предполагается кусочно-гладким. Это значит, что $\partial Q = \partial Q_1 \cup \ldots \cup \partial Q_k$, где ∂Q_i — гладкие подмногообразия коразмерности 1, попарно трансверсальные друг другу во всех точках пересечения.

Поток $\{T^t\}$ однозначно определен только для точек, траектории которых не проходят через пересечения гладких компонент края и не имеют бесконечного числа отражений от края в течение ограниченного промежутка времени. Обозначим через $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ инвариантное подмножество, для которого поток $\{T^t\}$ определен для всех t, $-\infty < t < \infty$. Тогда $\mu(\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}') = 0$ (см. [10]).

В нашем анализе основную роль играет граница фазового пространства $\partial\mathfrak{M} = \partial Q \times S$. Обозначим $\mathfrak{M}_1^+ = \{x \in \partial \mathfrak{M} \colon (v, n(q)) \geqslant 0\}$, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1^+ \cap \mathfrak{M}'$, где $n(q)$ — единичный вектор нормали края ∂Q в точке q, направленный внутрь Q. На $\mathfrak{M}_1$ определен естественный производный автоморфизм $T_1 \colon \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_1$ потока $\{T^t\}$. А именно, пусть $s(x) > 0$ — первый положительный момент времени, когда полутраектория $\{T^t x\}$, $t > 0$, достигает границы, и $\pi_1 \colon \mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}_1$ определяется равенством $\pi_1 x = T^{s(x)+0} x$. Тогда $T_1 = \pi_1 |_{\mathfrak{M}_1}$.

Инвариантная мера Лиувилля μ потока $\{T^t\}$ есть прямое произведение $\mu = \mu_Q \times \omega_S$, где μ_Q — лебегова мера на Q, а ω_S — лебегова мера на S. Инвариантная мера μ_1 для T_1 имеет вид $d\mu_1(q, v) = (v, n(q))dq\, d\omega_S$, где dq — мера на ∂Q, индуцированная римановой метрикой.

Эргодические свойства биллиардных систем зависят существенно от геометрических свойств края ∂Q, точнее от его кривизны, описываемой оператором второй квадратичной формы $K(q)$, $q \in \partial Q$. Оператор $K(q)$ представляет собой самосопряженный оператор, действующий в касательном пространстве $\mathcal{T}_q$ к краю ∂Q в точке $q \in \partial Q$.

Биллиардная система называется рассеивающей (см. [19]), если $K(q) > 0$ всюду на ∂Q. Эргодические свойства рассеивающих биллиардов исследованы достаточно полно. А именно, они являются K-системами (см. [19], [20]) и B-системами [28]. В некоторых случаях с помощью марковских разбиений удается исследовать скорость убывания временных корреляционных функций (см. [25], [26]).

Система n дисков на торе или в области с плоскими гранями сводится к биллиардной системе, для которой $K(q) \geqslant 0$, поскольку любой цилиндр Q_{ij} является плоским вдоль $(2n-2)$-мерного подпространства. Биллиарды, у которых $K(q) \geqslant 0$, называются полурассеивающими, и их анализ оказывается гораздо более сложным. В работах [24], [31] для полурассеивающих биллиардов при некоторых предположениях были построены устойчивые и неустойчивые трансверсальные слоения (см. также [23]). Мы опишем эти результаты в следующем параграфе.

§ 3. Устойчивые и неустойчивые слоения

Напомним, что локальным устойчивым многообразием (ЛУМ) точки $x \in \mathfrak{M}$ называется C^2-гладкое открытое подмногообразие $W \subset \mathfrak{M}$ такое, что:

1) $x \in W$;

2) $\rho(T^t y_1,\ T^t y_2) \leqslant c_1 \exp\{-c_2 t\}\rho(y_1,\ y_2)$

для всех $y_1,\ y_2 \in W$ и $t > 0$, где $c_1 = c_1(W) > 0$, $c_2 = c_2(W) > 0$ — постоянные, ρ — риманова метрика на $\mathfrak{M}$.

Локальное неустойчивое многообразие (ЛНМ) определяется аналогично, но теперь $t < 0$. Анализ ЛУМ и ЛНМ проводится с помощью соответствующих операторов второй квадратичной формы. А именно, для произвольного полурассеивающего биллиарда в d-мерной области Q возьмем C^2-гладкое ориентированное открытое подмногообразие $\tilde{\Sigma} \subset Q$ коразмерности 1 и его оснащение Σ единичными векторами нормали. Имеются две возможности для такого оснащения, которые мы обозначим Σ и $-\Sigma$. Мы будем называть Σ локальным многообразием (ЛМ), а $\tilde{\Sigma}$ — его носителем. Если $\{v(q),\ q \in \tilde{\Sigma}\}$ — поле единичных векторов нормали, то оператор $B_\Sigma(x)$, $x = (q,\ v(q))$ второй квадратичной формы определяется равенством

$$v(q + dq) = v(q) + B_\Sigma(x)dq + o(\| dq \|).$$

Здесь $B_\Sigma(x)$ — линейный самосопряженный оператор, действующий в $(d-1)$-мерном подпространстве $J(x)$, касательном к $\tilde{\Sigma}$ в точке $q \in \tilde{\Sigma}$. Заметим, что $J(x)$ зависит только от x, но не от Σ. ЛМ Σ называется выпуклым (строго выпуклым), если $B_\Sigma(x) \geqslant 0$ $(B_\Sigma(x) > 0)$ для всех $x \in \Sigma$. Если $B_\Sigma(x) \leqslant 0$ $(B_\Sigma(x) < 0)$ для всех $x \in \Sigma$, то ЛМ Σ называется вогнутым (строго вогнутым).

Исследуем сейчас поведение $B_\Sigma(x)$ под действием динамики. Обозначим $x_t = T^t x$, $q_t = \pi(x_t)$ и допустим вначале, что t настолько мало, что $T^s\Sigma = \Sigma_s$ не пересекает границы $\partial\mathfrak{M}$, $0 \leqslant s \leqslant t$. Тогда $J(x)$ и $J(x_t)$ параллельны друг другу и могут быть естественно отождествлены. Легко проверить, что в этом случае $B_{\Sigma_t}(x_t) = B_\Sigma(x)(I + tB_\Sigma(x))^{-1}$, где I — единичный оператор (см. [17]). Из этой формулы следует, что если Σ — выпуклое (строго выпуклое), то $T^t\Sigma$ — также выпуклое (строго выпуклое).

Пусть теперь t таково, что $T^t x \in \partial\mathfrak{M}$ и происходит отражение от края. Имеет смысл рассматривать векторы v_{t-0}, v_{t+0} до и после отражения от края, подпространства $J(x_{t-0})$, $J(x_{t+0})$, ортогональные к v_{t-0}, v_{t+0} соответственно, и операторы второй квадратичной формы

$$B_{\Sigma_{t-0}}(x_{t-0}),\ B_{\Sigma_{t+0}}(x_{t+0}),\ x_{t\pm 0} = (q_t,\ v_{t\pm 0}).$$

Для точки $q_t \in \partial Q$ определен оператор второй квадратичной формы $K(q_t)$ края ∂Q и поля единичных векторов нормали $n(q)$. Нам потребуется оператор $U(x_t)$, отображающий $J(x_{t+0})$ на $J(x_{t-0})$ параллельно вектору $n(q_t)$, оператор $V(x_t)$, отображающий $J(x_{t+0})$ на $\mathcal{T}_0(q_t)$ параллельно v_{t+0}, и оператор $V^*(x_t)$, отображающий $\mathcal{T}_0(q_t)$ на $J(x_{t+0})$ параллельно $n(q_t)$, $\mathcal{T}_0(x_t)$ — касательное пространство к ∂Q в точке q_t. Тогда (см. [34])

$$B_{\Sigma_{t+0}}(x_{t+0}) = U^{-1}(x_t)\, B_{\Sigma_{t-0}}(x_{t-0})\, U(x_t) + 2\,(v_{t+0}, n(q_t))\, V^*(x_t)\, K(q_t)\, V(x_t).$$

Из последней формулы следует в случае полурассеивающих биллиардов, что если $B_\Sigma(x) \geqslant 0$, $x \in \Sigma$, то $B_{\Sigma_t}(x_t) \geqslant 0$ для всех $t > 0$, т. е. образ под действием потока $\{T^t\}$ выпуклого ЛМ остается выпуклым ЛМ.

Для каждой точки $x = (q, v) \in \mathfrak{M}'$ определим линейный самосопряженный оператор $B(x)$, действующий в $(d-1)$-мерном пространстве $J(x)$. Пусть $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots$ — моменты последовательных отражений от края полутраектории $\{T^t x,\ t > 0\}$. Соответствующие операторы, введенные выше, обозначим теперь через $K_n = K(q_{t_n})$, $V_n = V(x_{t_n})$, $V_n^* = V^*(x_{t_n})$, $U_n = U(x_{t_n})$, $\cos\varphi_n = (v_{t_n+0}, n(q_{t_n}))$, $s_n = t_n - t_{n-1}$. Напишем теперь операторнозначную цепную дробь

$$(2)\qquad B(x) = \cfrac{I}{s_1 I + U_1 \cfrac{I}{2\cos\varphi_1 V_1^* K_1 V_1 + \cfrac{I}{s_2 I + U_2 \cfrac{I}{2\cos\varphi_2 V_2^* K_2 V_2 + \ldots} U_2^{-1}}} U_1^{-1}}$$

Для полурассеивающих биллиардов для любого $x \in \mathfrak{M}'$ непрерывная дробь $B(x)$ существует как предел конечных непрерывных дробей, представляет собой самосопряженный неотрицательный линейный оператор в $J(x)$, непрерывно зависящий от $x \in \mathfrak{M}'$ (см. [23], [24]). Мы можем поэтому написать разложение $J(x) = J_+(x) \oplus J_0(x)$, где $B(x)\,|_{J_+(x)} > 0$, $B(x)\,|_{J_0(x)} = 0$. Положим $j(x) = \dim J_+(x)$, $x \in \mathfrak{M}'$. Множество

$$\Omega = \{x \in \mathfrak{M}' \colon\ j(x) \neq 0 \text{ и для некоторой окрестности } V(x) \subset \mathfrak{M} \\ \text{функция } j(x) \text{ принимает постоянное значение на } V(x) \cap \mathfrak{M}'\}$$

открыто в $\mathfrak{M}'$. Для каждой точки $x = (q, v) \in \Omega$ рассмотрим касательное пространство $\mathcal{T}_x\mathfrak{M} = \mathcal{T}_q Q \oplus \mathcal{T}_v S$, где $\mathcal{T}_v S$ естественно изоморфно $J(x)$. Множество

$$E(x) = \{(e, f) \colon e \in J_+(x),\ f = -B(x)e\}$$

есть линейное подпространство пространства $\mathcal{T}_x\mathfrak{M}$, $\dim E(x) = j(x)$.

Теорема 4 (см. [24]). *Пусть Q таково, что для некоторой точки $q \in \partial Q$ оператор $K(q) \neq 0$. Тогда $\Omega \neq \varnothing$ и для почти каждой точки $x \in \Omega$ существует* ЛУМ $W^{(s)}(x)$, $x \in W^{(s)}(x)$, *причем* $\mathcal{T}_x W^{(s)}(x) = E(x)$.

Анализ функции $j(x)$ основан на следующем равенстве (см. [24]):

$$(3)\qquad J_0(x) = \\ = \{w \in J(x) \colon\ K_l V_l U_l^{-1} U_{l-1}^{-1} \ldots U_1^{-1} w = 0 \text{ для всех } l = 1, 2, \ldots\}.$$

Поскольку фазовое пространство конечномерно, найдется такое $l(x)$, что

$$(4)\qquad J_0(x) = \\ = \{w \in J(x) \colon\ K_l V_l U_l^{-1} U_{l-1}^{-1} \ldots U_1^{-1} w = 0 \text{ для всех } l = 1, 2, \ldots, l(x)\}.$$

Обозначим через $l_0(x)$ минимально допустимое $l(x)$. Тогда $l_0(x)$ есть неотрицательная целочисленная функция на $\mathfrak{M}'$.

Если $w \in J_0(x)$, то в силу (3) для всех $m \geqslant 1$

$$V_m^* K_m V_m U_m^{-1} U_{m-1}^{-1} \ldots U_1^{-1} w = 0,$$

т. е. $f_m = U_m^{-1} \ldots U_1^{-1} w$ есть собственный вектор оператора $V_m^* K_m V_m$ с собственным значением 0. Оператор $V_m^* K_m V_m$ — самосопряженный, неотрицательный и имеет единственный собственный вектор с положительным собственным значением: $V_m^* K_m V_m e_m = \lambda_m e_m$, $\lambda_m > 0$. Поэтому $e_m^{(+)} = U_1 \ldots \ldots U_m e_m \in J_+(x)$ и в силу (4)

$$J_+(x) = \mathscr{L}\{e_m^{(+)},\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ l_0(x)\}, \tag{5}$$

$\mathscr{L}$ обозначает линейное пространство, порожденное соответствующими векторами. Мы имеем $l_0(x) \geqslant j(x)$.

Исследуем функцию $j(x)$ для системы n дисков (шаров) на торе. Граница ∂Q есть объединение цилиндров (1). Каждый цилиндр представляет собой прямое произведение окружности (в случае шаров — сферы) и $(2n-2)$-мерного линейного пространства (в случае шаров $(3n-3)$-мерного). Легко видеть, что пересечение всех этих пространств содержит двумерное (в случае шаров — трехмерное) пространство, порожденное векторами $(1, 0, 1, 0, \ldots \ldots, 1, 0)$ и $(0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1)$ из $\mathbb{R}^{2n}$. Поэтому в силу (3) $\dim J_0(x) \geqslant 2$ для всех $x \in \mathfrak{M}'$ и, следовательно, $j(x) \leqslant 2n - 3$ (для шаров $j(x) \leqslant 3n - 4$). Существование общего двумерного подпространства связано с сохранением полного импульса системы P и условно-периодическим движением центра тяжести. При $P = 0$ центр тяжести неподвижен, и соответствующая система также является биллиардной системой $\mathfrak{M}^{(0)}$ в области $Q^{(0)}$, лежащей в $(2n-2)$-мерном торе. Компонентами границы служат теперь цилиндры $Q_{ij}^{(0)} = Q_{ij} \cap Q^{(0)}$. Максимальная размерность ЛУМ и ЛНМ может быть равной $2n - 3$ (в случае шаров $3n - 4$).

Предположим, что мы имеем систему n дисков, распадающуюся на подсистемы из n_1, n_2 дисков, $n = n_1 + n_2$, причем диски из разных подсистем не взаимодействуют. Согласно приведенным выше рассуждениям в такой ситуации $j(x) \leqslant (2n_1 - 3) + (2n_2 - 3) = 2n - 6$ при $n_1, n_2 \geqslant 2$ и $j(x) = 2(n-1) - 3 = 2n - 5$ при $n_1 = 1$. В обоих случаях размерность ЛУМ не максимальна.

Докажем с помощью индукции по n следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть при всех $n' < n$ выполнено утверждение следствия* 1. *Тогда в системе n дисков на шаре мера тех траекторий, вдоль которых диски распадаются на невзаимодействующие группы, равна нулю.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно, и существует подмножество $C_0 \subset \mathfrak{M}$ положительной меры, отвечающее невзаимодействующим группам. Напишем $x = (x', x'')$, где точки фазовых пространств соответствующих групп обозначены x', x''. Пусть $P' = P(x')$, $P'' = P(x'')$ — векторы полного импульса точек x', x'' соответственно. Для почти всех x компоненты P', P'' рационально независимы между собой. Через $M'(P')$, $M''(P'')$ обозначим фазовые пространства точек x', x'' со значением полного импульса P', P'' соответственно. Поток $\{T^t\}$ в C_0 есть прямое произведение потоков $\{T_|^t\}$, $\{T_{||}^t\}$ в $M'(P')$, $M''(P'')$. В силу сказанного выше для типичных P', P'' эргодические компоненты $\{T^t\} \mid M'(P')$, $M''(P'')$ имеют положительную меру и представляют собой прямое произведение пространств возможных положений центров тяжести каждой из групп, т. е. двумерных торов и подмножеств положительной меры в пространствах относительных положений каждой группы, когда $P' = P'' = 0$. Но это означает, что в одну эргодическую компоненту входят mod 0 всевозможные (x', x''), отличающиеся положением центров тяжести отдельных групп. Иными словами, взяв x', x'', мы можем произвольно двигать их как целое, оставаясь в той же эргодической компоненте. Но ясно, что существует множество сдвигов положительной меры, которое недопустимо, поскольку оно приводит к наложению дисков из разных групп. Тем самым $\mu(C_0) = 0$, и наше утверждение доказано.

Доказательство леммы 1 для случая шаров проходит без изменений.

Пусть теперь для любого $t > 0$ систему n дисков нельзя разбить на две невзаимодействующие подсистемы. По-видимому, в этом случае условие $j(x) < 2n - 3$ выполнено только на объединении счетного числа подмногообразий меньшей размерности в фазовом пространстве $\mathfrak{M}^{(0)}$, отвечающем специальным вырожденным траекториям, но мы не имеем полного доказательства этого утверждения для всех n. Для небольших значений n ($n \leqslant 10$) это выводится путем явного вычисления координат векторов $e_m^{(+)}$ в (5), выбора $2n - 3$ таких векторов (в случае шаров $3n - 4$ вектора) и проверки их линейной независимости для каждой возможной последовательности попарных столкновений дисков. Для произвольного n мы сведем необходимое нам утверждение к следующему:

Предположение 1. *Рассмотрим точки $x \in \mathfrak{M}^{(0)}$ такие, что систему дисков нельзя разбить на невзаимодействующие подсистемы при $t > t_0$ для каждого t_0. Тогда для каждой такой точки, не лежащей на объединении счетного числа некоторых подмногообразий меньшей размерности, в $\mathfrak{M}^{(0)}$ найдется $\tilde{l} = \tilde{l}(x)$ такое, что задание векторов скорости всех дисков в моменты первых $\tilde{l}$ столкновений и направлений линий центров сталкивающихся дисков при этих столкновениях однозначно определяет точку фазового пространства.*

Докажем, что из предположения 1 следует $j(x) = 2n - 3$. Пусть это не так, т. е. $\dim J_0(x) \geqslant 1$. Рассмотрим вектор $w_0 \in J_0(x)$, $w_0 \neq 0$ и точку $x' = (q + \varepsilon w_0, v)$, где $(q, v) = x$, а ε выбрано настолько мало, что первые $\tilde{l}$ отражений траектории точки x' происходят от тех же компонент края $\partial Q^{(0)}$, что и траектории точки x. Тогда в силу (3) отражения траекторий $T^t x$ и $T^t x'$ от каждого цилиндра происходят в точках, сдвинутых друг относительно друга вдоль образующей цилиндра. Это означает, что для каждой пары сталкивающихся дисков векторы линии центров, соответствующих траекториям $T^t x$ и $T^t x'$ совпадают. Кроме того, векторы нормали к каждому цилиндру в точках отражения траекторий $T^t x$ и $T^t x'$ совпадают, поэтому и векторы скорости всех дисков в моменты первые $\tilde{l}$ столкновений совпадают. Тем самым мы имели бы неоднозначность восстановления координат дисков в моменты первых $\tilde{l}$ столкновений, что противоречит предположению 1. Приведенные рассуждения переносятся без изменений на случай шаров.

§ 4. Локальная эргодичность

Начнем с доказательств теорем 1—3. Наиболее просто доказывается теорема 3, поскольку соответствующая энтропийная техника достаточно далеко продвинута.

Пусть $B(x) \geqslant 0$ — оператор второй квадратичной формы для ЛНМ полурассеивающего биллиарда. Утверждается, что энтропия автоморфизма T_1

$$h(T_1) = \int_{\mathfrak{M}_1} \ln \det (I + \tau B(x))\, d\mu_1(x),$$

где $\tau > 0$ — время до ближайшего отражения. Общие формулы для энтропии потока или автоморфизма с инвариантными измеримыми слоениями были получены в [18]. Для потоков со свойствами полной гиперболичности, имеющих особенности, аналогичная формула обсуждается в [31].

Заметим, что семейство операторов $B(x)$ для ЛУМ и ЛНМ определяет разложение касательного расслоения фазового пространства на инвариантные подрасслоения, и формула типа приведенной выше получается с помощью техники Песина (см. [13]). Мы не останавливаемся на этом более подробно.

Обратимся к доказательству теоремы 1. Достаточно доказать соответствующее утверждение для автоморфизма T_1. В условиях теоремы $j(x) = 2n - 3$ (в случае шаров $j(x) = 3n - 4$) почти всюду и поэтому равна половине размерности $\partial\mathfrak{M}^{(0)}$. Через $W_1^{(u)}(x)$, $W_1^{(s)}(x)$ обозначим ЛНМ и ЛУМ точки $x \in \partial\mathfrak{M}^{(0)}$.

Для почти каждой точки x эти $W_1^{(u)}(x)$, $W_1^{(s)}(x)$ принадлежат той же эргодической компоненте, что и x. Можно показать, что семейства $\{W_1^{(u)}(x)\}$, $\{W_1^{(s)}(x)\}$ обладают свойством абсолютной непрерывности. В данном случае это означает следующее. Каждое $W_1^{(u)}(x)$ является гладким подмногообразием. Возьмем произвольное подмножество $C \subset W_1^{(u)}(x)$ положительной меры и проведем через почти каждую точку у ЛУМ $W_1^{(s)}(x)$. Абсолютная непрерывность означает, что $\bigcup_{y \in C} W_1^{(s)}(y)$ есть множество положительной меры в $\partial\mathfrak{M}^{(0)}$.

Свойство абсолютной непрерывности было впервые установлено для систем Аносова (см. [2]). Для разрывных систем с особенностями, к которым относится рассматриваемый нами случай, подробное изложение абсолютной непрерывности см. в [31].

Рассуждения Хопфа (см. [18], [19]) показывают, что для почти каждой точки x множество $\bigcup_{y \in W_1^{(u)}(x)} W_1^{(s)}(y)$ принадлежит mod 0 одной эргодической компоненте. В силу абсолютной непрерывности это множество имеет положительную меру. Тем самым доказано, что эргодические компоненты T_1, а тем самым и $\{T^t\}$ имеют положительную меру.

Исследуем теперь K-свойство T_1. Используемый ниже метод впервые появился в [18]. Нам понадобится понятие π-разбиения, т. е. максимального разбиения с нулевой энтропией (для T_1). Введем глобальные слои $\overline{W}_1^{(u)}(x) = \bigcup T_1^n W_1^{(u)}(T_1^{-n}x)$, $\overline{W}^{(s)}(x) = \bigcup T_1^{-n} W_1^{(s)}(T_1^n x)$. Тогда π не превосходит измеримой оболочки разбиения, элементы которого содержат вместе с почти каждой точкой x содержащие их $\overline{W}_1^{(u)}(x)$, $\overline{W}_1^{(s)}(x)$. В силу абсолютной непрерывности последнее разбиение дискретно. Следовательно, и разбиение π дискретно. Но тогда и для потока $\{T^t\}$ разбиение π дискретно. Так как оно инвариантно, то отсюда следует, что π есть разбиение на эргодические компоненты.

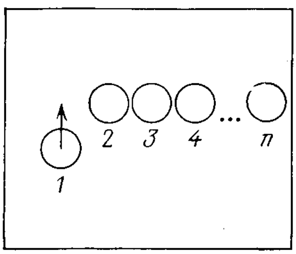

Рис. 1

Для доказательства теоремы 2 достаточно установить, что в условиях теоремы существует открытое множество, где $j(x) = 2n - 3$. В самом деле, множество, где $j(x) = 2n - 3$ открыто и инвариантно mod 0. Поэтому к нему применимы предыдущие рассуждения.

Рассмотрим систему n дисков радиуса $r \leqslant 1/2n$. Их можно расположить, как показано на рис. 1: один движущийся диск с вектором скорости $v_1 = (0, 1)$ и $n - 1$ покоящихся дисков, центры которых расположены на горизонтальной прямой. Мы рассматриваем векторы скорости в системе координат, связанной со вторым диском, переход в исходную систему координат, в которой $P = 0$, тривиален. Предположим, что диски 1 и 2 сталкиваются так, что вектор их линии центров в момент столкновения почти горизонтален. Тогда диск 2 придет в движение и произойдет цепочка столкновений 2-го и 3-го, 3-го и 4-го, . . ., $(n - 1)$-го и n-го дисков. Легко заметить, что вектор скорости i-го диска $(i \geqslant 2)$, полученный им сразу же после столкновения с $(i - 1)$-м диском, будет иметь вид (α_i, β_i), где $|\beta_i| \ll \alpha_i$ и $\beta_i > 0$ для четных i и $\beta_i < 0$ для нечетных i. Динамика этой системы в прошлом (при $t < 0$) аналогична с точностью до симметрии, т. е. векторы (α_i', β_i') таковы, что $|\beta_i'| \ll \alpha_i'$ и $\beta_i' > 0$ для нечетных и $\beta_i' < 0$ для четных i.

Докажем в этом случае предположение 1, т. е. покажем, что задание всех векторов скорости и направлений линии центров для сталкивающихся дисков при рассмотренных $2(n - 1)$ столкновениях (в прошлом и в будущем) достаточно для однозначного восстановления координат дисков. Зафиксируем начальное положение 2-го диска (что эквивалентно фиксации центра тяжести системы). Тогда направление линии центров сталкивающейся пары

(1, 2) однозначно определяет координаты 1-го диска. Координаты 3-го диска мы восстановим, зная направление линии центров сталкивающихся дисков 2 и 3. При этом множество возможных положений центра 3-го диска образует прямую, параллельную вектору (α_2, β_2). Аналогично, рассматривая столкновение дисков 2 и 3 в прошлом, локализуем положение центра 3-го диска на некоторой прямой, параллельной вектору (α_2', β_2'). Но $\beta_2 > 0$, $\beta_2' < 0$, поэтому эти прямые не параллельны, что определяет единственную точку их пересечения — это положение центра 3-го диска. Продолжая эти рассуждения, восстановим координаты 4-го, . . ., n-го дисков.

Как показано в § 3, из предположения 1 следует соотношение $j(x) = 2n - 3$, т. е. это соотношение выполнено в некоторой окрестности точки фазового пространства, соответствующей положению дисков на рис. 1. Тем самым теорема 2 доказана.

Аналогичные рассуждения проводятся для случая шаров — в примере на рис. 1. Центры всех шаров располагаются в одной плоскости, и для них проводится аналогичный анализ, доказывающий предположение 1.

Теперь мы обратимся к более тонкому изучению структуры эргодических компонент. Мы уже упоминали об основной теореме теории рассеивающих бильярдов, которая дает возможность установить единственность эргодической компоненты. Первый шаг в доказательстве основной теоремы состоит в том, чтобы показать, что у точек общего вида есть окрестность, принадлежащая mod 0 одной эргодической компоненте. Ниже приводится новое доказательство этого утверждения, применимое как к полурассеивающим, так и к рассеивающим бильярдам. В § 5 мы используем его для выделения случаев систем трех дисков, для которых доказывается полная эргодичность и K-свойство.

Для полурассеивающего биллиарда рассмотрим многообразие $R \subset \partial\mathfrak{M}$, состоящее из точек разрыва отображения T_1, особых точек края $\partial\mathfrak{M}$ и точек множества $\mathfrak{M}_2 = \{x \in \partial\mathfrak{M}\colon (n, v) = 0\}$. Предположим выполненным одно из следующих условий:

А. Для почти любой точки $x \in T_1^2 R$ выполнено соотношение (в смысле внутренней римановой метрики на $T_1^2 R$)

$$\| ((I + \tau_n B_n) U_{n-1}^{-1} (I + \tau_{n-1} B_{n-1}) U_{n-2}^{-1} \dots U_2^{-1} (I + \tau_1 B_1))^{-1} \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

где B_n — оператор кривизны в точке $T^{t_n+0}x$ образа плоского слоя $\Sigma^{(0)}$, содержащего точку $-x$ (под плоским слоем понимается слой с плоским носителем $\tilde{\Sigma}^{(0)}$) под действием T^{t_n+0}, обозначения U_i, t_i, τ_i были введены в § 3. Иначе говоря, плоский слой, содержащий точку x, расширяется во всех направлениях в точке πx под действием T^t неограниченно при $t \to \infty$ (см. [34]).

Б. Для почти любой точки $x \in R$ (в смысле внутренней римановой метрики) существует ЛУМ $W_1^{(s)}(T_1^2 x)$ в точке $T_1^2 x$ по отношению к производному автоморфизму T_1.

Условие А слабее (это также будет показано), и каждое из них достаточно для доказательства формируемой ниже теоремы 5.

Т е о р е м а 5. *Пусть $x \in \mathfrak{M}'$ такова, что $B(x) > 0$, $B(-x) > 0$, где $-x = (q, -v)$, если $x = (q, v)$ и выполнено одно из условий* А *или* Б. *Тогда существует окрестность $U(x) = \mathfrak{M}$ точки x, принадлежащая* mod 0 *одной эргодической компоненте.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сделаем вначале следующее замечание. В случае полурассеивающих биллиардов в ограниченных областях евклидова пространства длина свободного пробега равномерно ограничена, а число многообразий разрыва для T_1 конечно. В случае областей, принадлежащих тору, этого также можно добиться. А именно, пусть тор получается из склеивания надлежащих граней параллелепипеда K. Рассмотрим ∂Q, добавив к нему ∂K и сохраним обозначение T_1 за производным автоморфизмом, отвечающим такому расширению края (см. § 2). Инвариантная мера μ_1 автоморфизма T_1 в точках $q \in \partial K$ имеет плотность $d\mu_1(q, v) = |(n(q), v)|\, dq\, d\omega_S$, где $n(q)$ — вектор нормали к поверхности ∂K.

Пусть $z(x)$ обозначает максимальный диаметр основания цилиндрической окрестности в Q отрезка траектории, соединяющего x и $T_1^{-1}x$ и оканчивающейся на двух регулярных компонентах (расширенного) края ∂Q. Для точек $x \in \mathfrak{M}$ обозначим $z(x) = z(\pi_1 x)$.

Лемма 2. $\mu_1\{x \in \mathfrak{M}_1 \colon z(x) < \varepsilon\} \leqslant \mathrm{const}\,(Q)\varepsilon$ *для всех* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть только достаточно малые ε. Для таких ε имеются три возможности.

1°. Одна из точек $\pi(x)$, $\pi(T_1^{-1}x)$ лежит в ε_1-окрестности множества сингулярных точек Q_{00} границы $\varepsilon_1 = \varepsilon/\cos\varphi$, $\cos\varphi = (n(q), v)$ (рис. 2, *а*).

Q_{00} состоит из конечного числа гладких подмногообразий коразмерности 1 в ∂Q. Поэтому мера его ε_1-окрестности в ∂Q не превосходит $\mathrm{const}(Q)\varepsilon_1$

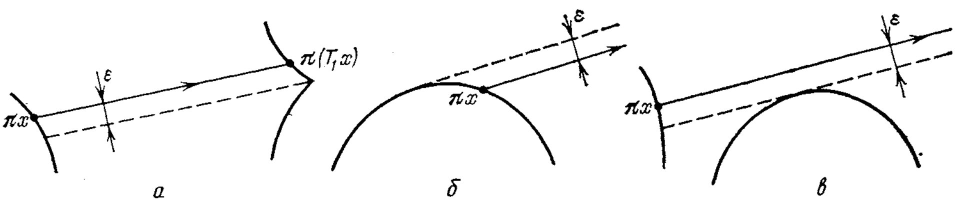

Рис. 2 *а*, *б*, *в*

(см. [27]). Тогда μ_1-мера множества таких точек не превосходит

$$\mathrm{const}\,(Q) \int\limits_S \frac{\varepsilon}{\cos\varphi}\cos\varphi\, d\omega_S = \mathrm{const}\,(Q)\,\varepsilon.$$

2°. $\varphi > \frac{\pi}{2} - \mathrm{const}(Q)\sqrt{\varepsilon}$ (рис. 2, *б*). Тогда $\cos\varphi < \mathrm{const}(Q)\sqrt{\varepsilon}$ и μ_1-мера таких точек не превосходит

$$\int\limits_{\partial Q} \int\limits_{\cos\varphi < \mathrm{const}\,(Q)\sqrt{\varepsilon}} \mu_1(d\omega,\, dq) \leqslant \mathrm{const}\,(Q) \int\limits_{\frac{\pi}{2} - \mathrm{const}\,(Q)\sqrt{\varepsilon}}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \leqslant \mathrm{const}\,(Q)\,\varepsilon.$$

3°. Часть рассматриваемой траектории лежит в ε-окрестности регулярной компоненты края, которую она не пересекает (рис. 2, *в*). Тогда μ_1-мера таких точек не превосходит $\mathrm{const}(Q)S(Q)\varepsilon$, где $S(Q)$ — площадь ∂Q.

Лемма доказана.

Вернемся к начальной точке x с $B(x) > 0$ и $B(-x) > 0$. В [23] показано, что $j(y) = j(-y) \equiv d - 1$ в достаточно малой окрестности $U(x)$ и для почти всех $y \in U(x)$ существуют $(d-1)$-мерные ЛУМ $W^{(s)}(y)$ и ЛНМ $W^{(u)}(y)$.

Утверждение теоремы достаточно показать для достаточно малой окрестности $U_1(x_1) \subset \mathfrak{M}_1$ точки $x_1 = \pi_1(x)$. Проекции $W^{(s)}$, $W^{(u)}$ на $\mathfrak{M}_1$ дают ЛУМ и ЛНМ $W_1^{(s)}(y_1)$, $W_1^{(u)}(y_1)$ для $y_1 \in U_1(x_1)$ по отношению к автоморфизму T_1. Их размерности равны $d-1$, в то время как $\dim U_1(x_1) = 2d-2$.

Из непрерывности $B(x)$ на $\mathfrak{M}'$ и теоремы 4 следует, что касательные пространства $\mathcal{T}_y W_1^{(s)}$, $\mathcal{T}_y W_1^{(u)}$ к $W_1^{(s)}$, $W_1^{(u)}$ непрерывно зависят от $y \in U_1(x_1) \cap \mathfrak{M}'$. Взяв $U_1(x_1)$ достаточно малой, мы можем считать, что $\mathcal{T}_y W_1^{(s)}$ ($\mathcal{T}_y W_1^{(u)}$) достаточно близки друг к другу для различных y. Неравенства $B(x) > 0$, $B(-x) > 0$ означают также, что $\mathcal{T}_y W_1^{(s)}$, $\mathcal{T}_y W_1^{(u)}$ трансверсальны друг другу и их прямая сумма есть $\mathcal{T}_y \mathfrak{M}_1$.

Введем малый параметр δ, который впоследствии будет стремиться к нулю. Мы рассмотрим семейство открытых покрытий $U_1(x_1)$, зависящих от δ со следующими свойствами.

Элемент G каждого покрытия представляет собой «параллелограмм», т. е. образ $(2d-2)$-мерного куба при линейном отображении $\mathbb{R}^{2d-2} \to \mathfrak{M}_1$, причем для некоторой точки $y \in G$ касательные пространства $\mathcal{T}_y W_1^{(s)}$, $\mathcal{T}_y W_1^{(u)}$ параллельны соответствующим граням G, а длина каждого ребра G равна δ. Покрытия $\{G_i^{(\delta)}, 1 \leqslant i \leqslant I(\delta)\}$, которые мы будем рассматривать, таковы, что:

а) расстояния между касательными пространствами к точкам на одноименных гранях различных параллелограммов $G_i^{(\delta)}$ достаточно малы, а их центры образуют конечное множество, достаточно близкое к некоторой решетке в зависимости от размера $U_1(x_1)$;

б) если $G_i^{(\delta)} \cap G_j^{(\delta)} \neq \varnothing$ для некоторых $i \neq j$, то $\mu(G_i^{(\delta)} \cap G_j^{(\delta)}) \geqslant c_0\delta^{2d-2}$, где c_0 не зависит от δ;

в) каждая точка $y \in U_1(x_1)$ принадлежит не более чем 2^{2d-1} различным параллелограммам.

Пусть $G_i^{(\delta)}$ — некоторый параллелограмм из покрытия, $y \in G_i^{(\delta)}$ — отмеченная точка. Существует 2^{2d-1} $(d-1)$-мерных граней $G_i^{(\delta)}$, параллельных $\mathcal{T}_y W_1^{(u)}$. Мы будем называть такие грани u-ведущими. Соответственно существуют 2^{2d-1} $(d-1)$-мерных граней, параллельных $\mathcal{T}_y W_1^{(s)}$, которые мы будем называть s-ведущими.

Лемма 3. *Для всякого $\delta \leqslant \delta_0(x)$ параллелограммы из покрытия $\{G_i^{(\delta)}\}$ можно разбить на две группы $\mathfrak{A}_0^{(\delta)}$ и $\mathfrak{A}_1^{(\delta)}$ таким образом, что*:

а) *для $G_i^{(\delta)} \in \mathfrak{A}_1^{(\delta)}$ возьмем любую из его u-ведущих граней и ее $c_1\delta$-окрестность $U^{(u)}$, где c_1 не зависит от δ, но может быть сделана сколь угодно малой за счет уменьшения $U_1(x_1)$; рассмотрим $z \in U^{(u)}$ такие, что $\partial(W_1^{(u)}(z) \cap G_i^{(\delta)})$ принадлежит объединению s-ведущих граней. Тогда мера таких z положительна. Аналогичное утверждение верно для любой s-ведущей грани*;

б) *мера объединения всех параллелограммов из $\mathfrak{A}_0^{(\delta)}$ равна $\delta\varphi_1(\delta)$, где $\varphi_1(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.*

В [20] дан подробный вывод теоремы 5 из леммы 3. Здесь мы дадим только набросок доказательства.

В основе лежит идея Э. Хопфа [23], состоящая в том, что все ЛУМ и ЛНМ принадлежат mod 0 одной эргодической компоненте. В самом деле, для любой непрерывной функции f на $\mathfrak{M}_1^+$ временные средние $f^{(+)}(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(T_1^i y)$ принимают постоянные значения на $W_1^{(s)}$, поскольку $\operatorname{diam}(T_1^i W_1^{(s)}) \to 0$ при $i \to \infty$, а $\mathfrak{M}_1^+$ есть компакт. Точно так же $f^{(-)}(y) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(T_1^{-i} y)$ постоянно на каждом $W_1^{(u)}$. Поэтому оба $W_1^{(s)}(x)$, $W_1^{(u)}(x)$ и их объединение также принадлежат mod 0 одной эргодической компоненте.

Как показано в [20], из леммы 3 вытекает, что можно найти множество параллелограммов $\mathfrak{A}_2^{(\delta)} \subset \mathfrak{A}_1^{(\delta)}$, объединение которых связно, и мера этого объединения стремится к $\mu_1(U_1(x_1))$ при $\delta \to 0$. Поэтому для любой пары точек x', x'', принадлежащих подмножеству полной меры в $U_1(x_1)$, существуют ЛУМ $W_1^{(s)}(x')$ и $W_1^{(s)}(x'')$ размера δ' и δ'' соответственно и при некотором $\delta < \min\{\delta', \delta''\}$ обе точки x', x'' попадут в параллелограммы из $\mathfrak{A}_2^{(\delta)}$. В силу свойства а) леммы 2 мы сможем найти цепочку ЛУМ и ЛНМ $W_{1,1}^{(s)}$, $W_{1,2}^{(u)}$, ..., $W_{1,k}^{(u)}$ так, что $x' \in W_{1,1}^{(s)}$, $x'' \in W_{1,k}^{(u)}$ и $W_{1,i}^{(s)} \cap W_{1,i+1}^{(u)} \neq \varnothing$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Теорема доказана.

Доказательство леммы 3. Как и в [34], первый шаг состоит в выборе «слишком плохих» параллелограммов и включении их в $\mathfrak{A}_0^{(\delta)}$. Отображение T_1 кусочно-непрерывно. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ степень T_1^k разрывна на объединении конечного числа подмногообразий с краем коразмерности 1 (напомним, что мы увеличили край ∂Q, добавив к нему ∂K, см. выше), которые представляют собой образы под действием T_1^j ($j = 0, -1, \ldots$ $\ldots, -k+1$) подмногообразий $Q_{00} \times S$ и $\mathfrak{M}_2$. Пусть $\mathfrak{A}_{00}^{(\delta)}$ есть множество тех параллелограммов $G_i^{(\delta)}$, которые пересекают не менее двух многообразий разрыва T_1^k при $k \leqslant F(\delta)$. При этом $F(\delta)$ можно выбрать таким образом, что $F(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$, а мера $\mathfrak{A}_{00}^{(\delta)}$ равна $\delta\varphi_2(\delta)$, где $\varphi_2(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ (подробнее это объясняется в [33]). Множество $\mathfrak{A}_{00}^{(\delta)}$ включается в $\mathfrak{A}_0^{(\delta)}$.

Далее, $\dim J_0(y) \equiv 0$ в $U(x)$. Поэтому из (4) вытекает, что каждая точка $y \in U(x) \cap \mathfrak{M}'$ есть точка локального максимума функции $l_0(y)$, введенной в § 3. Мы можем считать, что $l_0(y) \leqslant l_0(x)$ для всех $y \in U(x) \cap \mathfrak{M}'$. Обозначим $l_1(x)$ число отражений траектории точки x от расширенного края ∂Q до $l_0(x)$-го отражения от нерасширенного края включительно. Пусть $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ — моменты отражений траектории точки x от расширенного края и $t^* \in (t_{l_1(x)}, t_{l_1(x)+1})$. Пусть $U(x)$ настолько мала, что T^{t^*} гладко на $U(x)$. Тогда носитель $\widetilde{\Sigma}$ любого выпуклого ЛМ Σ, содержащего $-T^{t^*}y$ для $y \in U(x)$, будет расширяться во всех направлениях под действием $\pi \circ T^{-t^*} \circ \pi^{-1}$, где T^{-t^*} действует на Σ. Если $D = D(y, t^*, \Sigma)$ есть дифференциал отображения $\pi \circ T^{-t^*} \circ \pi^{-1} |_{\widetilde{\Sigma}}$ в точке $\pi(-T^{t^*}y)$, то

$$\|D^{-1}\| \leqslant \lambda < 1, \tag{6}$$

где λ зависит только от x, но не от y, t^*, Σ (доказательство см. в [24]). Иначе говоря, носитель всякого выпуклого ЛМ, содержащегося в $-T^{t^*}U(x) = \{-y\colon y \in T^{t^*}U(x)\}$, расширяется под действием $\pi \circ T^{-t^*} \circ \pi^{-1}$ по любому направлению с коэффициентом, не меньшим чем $\Lambda = \lambda^{-1} > 1$. Выберем $U_1(x_1)$ настолько малой, что $T^t y \notin U(x)$ для всех $y \in U(x)$, $0 < t \leqslant t_{l_1(x)}$ (в случае периодической точки x такой выбор также возможен, так как $t_{l_1(x)}$ не превышает периода траектории точки x).

Пусть $y \in \mathfrak{M}'$ и $t > 0$, $\delta > 0$. Рассмотрим всевозможные выпуклые слои Σ, содержащие точку $-T^t y$, на которых отображение T^t гладко, и такие, что расстояние от точки $\pi(-T^t y)$ до наиболее удаленной точки края носителя $\partial\widetilde{\Sigma}$ во внутренней метрике $\widetilde{\Sigma}$ не превышает δ. Обозначим $\varkappa_{,t\delta}(y)$ минимальный коэффициент расширения по любому направлению носителей таких слоев в любой их точке под действием отображения T^t. Заметим, что коэффициент $\varkappa_{t,\delta}(y)$ монотонно возрастает при $\delta \to 0$ и имеет предел $\varkappa_{t,0}(y)$, равный минимальному собственному значению оператора (см. [34])

$$(I + \tau_1 B_1^{(l)}) U_1 (I + \tau_2 B_2^{(l)}) U_2 \ldots U_{l-1} (I + \tau_l B_l^{(l)}), \tag{7}$$

где $B_i^{(l)}$ есть оператор кривизны в точке $-T^{t_i - 0}y$ образа плоского слоя $\Sigma(i)$, содержащего точку $-T^t y$ (напомним, что под плоским слоем понимается слой с плоским носителем $\widetilde{\Sigma}^{(t)}$) под действием $T^{t - t_i + 0}$, обозначения U_i, t_i, τ_i были введены в § 3, а l — число отражений от края ∂Q траектории $T^s y$ при $0 < s < t$.

Рассмотрим множество

$$U_1^{(0)} = \{y \in U_1(x_1)\colon\ z(T^t y) \geqslant c_2 \delta \varkappa_{t,\, c_2\delta}(y) \ \text{ для всех } \ t > 0\},$$

значение константы c_2 будет определено ниже. Мы покажем, что ЛУМ $W_1^{(s)}(y)$ для любой точки $y \in U_1^{(0)}$ имеет размер по любому направлению, не меньший чем $\sqrt{d}\delta$. Пусть $r(y)$, $y \in \mathfrak{M}$ есть расстояние от точки $\pi(y)$ до границы $\partial\widetilde{W}^{(s)}(y)$, где $\widetilde{W}^{(s)}(y)$ — носитель слоя $W^s(y)$, а расстояние берется в смысле индуцированной римановой метрики на $W^{(s)}(y)$. Если ЛУМ для y не существует, то полагаем $r(y) = 0$.

Лемма 4. *Если $y \in U_1^{(0)}$, то $r(y) \geqslant c_2\delta$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Sigma}^{(t)}$ есть $(d-1)$-мерный диск радиуса $r = \min\{c_2\delta, z(T^t y)\}$ в Q с центром в точке $\pi(T^t y)$, ортогональный вектору скорости v_t точки $T^t y$. Построим ЛМ $\Sigma^{(t)}$ с носителем $\widetilde{\Sigma}^{(t)}$ и векторами скорости, равными $-v_t$. Отображение $T^t|_{\Sigma^{(t)}}$ кусочно-гладкое. Обозначим $\Sigma_0^{(t)}$ область в $\Sigma^{(t)}$, содержащую точку $-T^t y$, на которой T^t гладко. ЛМ $\Sigma_0^{(t)}$ и его образы $\Sigma_{0s}^{(t)} = T^s\Sigma_0^{(t)}$ при $0 \leqslant s \leqslant t$ выпуклы, поэтому их носители не сжимаются ни в каком направлении с ростом s. Более того, в силу определения $\varkappa_{t,\delta}$ носитель $\widetilde{\Sigma}_0^{(t)}$ расширяется не менее чем в $\varkappa_{t,c_2\delta}(y)$ раз по любому направлению под действием T^t.

Пусть $r_t(y)$ есть расстояние от точки $\pi(y)$ до ближайшей к ней точки $q^{(t)}$ границы $\partial\widetilde{\Sigma}_{0,t}^{(t)}$ (в смысле римановой метрики на $\widetilde{\Sigma}_{0,t}^{t}$). Предположим, что $r_t(y) < c_2\delta$ для некоторого $t > 0$. Если q^t получается из некоторой точки $\partial\widetilde{\Sigma}^{(t)}$, то тогда $z(T^t y) \leqslant c_2\delta$ и $r_t(y) \geqslant z(T^t y)\varkappa_{t,c_2\delta}(y) \geqslant c_2\delta$. В противном случае $q^{(t)}$ будет носителем некоторой точки $\partial\Sigma_{0,t}^{t}$, которая под действием T^s для некоторого $s \in (0, t)$ переходит в особую точку края $y' \in \partial\mathfrak{M}$ или в точку $y' \in \mathfrak{M}_2$. Согласно определению функции $z(x)$ имеем $z(T^s y) \leqslant \operatorname{dist}(\pi y', \pi T^s y) \leqslant$ $\leqslant c_2\delta$, и поэтому $r_t(y) \geqslant z(T^s y)\varkappa_{s,c_2\delta}(y) \geqslant c_2\delta$. Итак, во всех случаях $r_t(y) \geqslant c_2\delta$, что доказывает лемму, поскольку $W^{(s)}(y)$ есть предел слоев $-\Sigma_{0,t}^{t}$ при $t \to \infty$.

Отображение π_1 является гладким в точке x. Поэтому c_2 можно выбрать так, что носитель ЛУМ $W_1^{(s)}(y) = \pi_1 W^{(s)}(y)$ будет иметь размер по каждому направлению, не меньший чем $\sqrt{d}\delta$. Следовательно, и точки $y \in U_1^0$ будут иметь ЛУМ нужного размера.

Исследуем теперь дополнение $U_0 = U_1(x_1) \setminus U_1^{(0)}$. Обозначим $\varkappa_{n,\delta}(y) = \varkappa_{t_{n-1},\delta}(y)$, где t_n — момент n-го отражения траектории $T^t y$ от расширенного края ∂Q. Ясно, что $U_0 = U_{0,2} \cup U_{0,3} \cup \ldots$, где

$$U_{0,n} = \{y \in U_1(x_1)\colon\ z(T_1^n y) \leqslant c_2\delta\varkappa_{n,c_2\delta}^{-1}(y)\},$$

и $U_{0,n} \subset U_{0,n,0} \cup U_{0,n,1} \cup \ldots$, где

$$U_{0,n,m} = \{y \in U_{0,n}\colon\ \log_\Lambda \varkappa_{n,c_2\delta}(y) \in [m, m+1)\},$$

где константа $\Lambda > 1$ была введена в замечании к формуле (6). Поэтому

$$\mu_1(U_0) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\mu_1(U_{0,n,m}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\mu_1(T_1^{n-1}U_{0,n,m}). \tag{8}$$

Лемма 5. *Для любых $m \geqslant 0$, $n_1 \geqslant 2$, $n_2 \geqslant 2$, $n_1 \neq n_2$ множества $T_1^{n_1-1}U_{0,n_1,m}$ и $T_1^{n_2-1}U_{0,n_2,m}$ не пересекаются.*

Доказательство. Пусть $n_1 < n_2$ и $y \in T_1^{n_1-1}U_{0,n_1,m} \cap T_1^{n_2-1}U_{0,n_2,m}$. Тогда $y' = T_1^{-n_1+1}y \in U_{0,n_1,m} \subset U_1(x_1)$ и $y'' = T_1^{-n_2+1}y \in U_{0,n_2,m} \subset U_1(x_1)$. Заметим, что $y' = T^{t'}y$ и $y'' = T^{t''}y$ для некоторых t', $t'' > 0$. Любой выпуклый слой Σ размера не более $c_2\delta$, содержащий точку $-y$, расширяется под действием $T^{t'}$ не менее чем в $\varkappa_{n_1,c_2\delta}(y')$ раз. Но слой $T^{t'}\Sigma$ под действием отображения $T^{t''-t'}$ расширяется не менее чем в Λ раз в силу (6), поэтому

$$\varkappa_{n_2,c_2\delta}(y'') \geqslant \varkappa_{n_1,c_2\delta}(y') \cdot \Lambda,$$

что противоречит определению множеств $U_{0,n,m}$. Лемма 5 доказана.

Лемма 5 позволяет преобразовать (8):

$$\sum_{n=2}^{\infty}\mu_1(T_1^n U_{0,n,m}) = \mu_1\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} T_1^n U_{0,n,m}\right) \leqslant \tag{9}$$

$$\leqslant \mu_1\{y \in \partial\mathfrak{M}\colon\ z(y) \leqslant c_2\delta\lambda^m\} \leqslant c_3(x_1)\,\delta\lambda^m,$$

последнее неравенство следует из леммы 2. С помощью (8) и (9) имеем

$$\mu_1(U_0) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} c_3(x_1)\,\delta\lambda^m = c_4(x_1)\,\delta. \tag{10}$$

Положим $U_{0\alpha} = \bigcup_{m=0}^{F(\delta)} U_{0,m}$ и $U_{0\omega} = \bigcup_{n=F(\delta)+1}^{\infty} U_{0,n}$, где функция $F(\delta)$ была введена в начале доказательства леммы 2. Докажем, что

$$\mu_1(U_{0\omega}) \leqslant \delta\varphi_3(\delta), \tag{11}$$

где $\varphi_3(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Для этого нам потребуется одно из дополнительных условий А или Б.

Лемма 6. *Если для каждого $m \geqslant 0$ и любой функции $F_1(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$ выполнено*

$$\sum_{n=F_1(\delta)}^{\infty} \mu_1(U_{0,n,m}) = o(\delta) \quad \textit{при} \quad \delta \to 0,$$

то соотношение (11) *справедливо (заметим, что множества $U_{0,n,m}$ зависят от параметра δ).*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу (9) найдется m_0 такое, что

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \mu_1(U_{0,n,m}) \leqslant \frac{\varepsilon\delta}{2}.$$

Согласно условию леммы 6 для каждого $m = 0, 1, \ldots, m_0 - 1$ найдется такое $N(m)$ и $\delta_0(m)$, что при всех $\delta < \delta_0(m)$

$$\sum_{n=N(m)}^{\infty} \mu_1(U_{0,n,m}) \leqslant \frac{\varepsilon\delta}{2m_0}.$$

Тогда при всех δ таких, что $\delta < \delta_0(m)$ и $F(\delta) > N(m)$ для каждого $m = 0, 1, \ldots, m_0 - 1$, справедливо

$$\sum_{n=F(\delta)+1}^{\infty} \mu_1(U_{0,n}) \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=F(\delta)+1}^{\infty} \mu_1(U_{0,n,m}) \leqslant \frac{\varepsilon\delta}{2} + m_0 \frac{\varepsilon\delta}{2m_0} = \varepsilon\delta,$$

что доказывает лемму 6.

Предположим, что условия леммы 6 не выполнены, т. е. найдутся $m_1 \geqslant 0$, $\varepsilon_1 > 0$ и функция $F_1(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$ такие, что

$$\sum_{n=F_1(\delta)}^{\infty} \mu_1(U_{0,n,m_1}) \geqslant \varepsilon_1\delta. \tag{12}$$

Рассмотрим многообразие R и множество W «вырожденных траекторий»

$$W = \{x \in \partial\mathfrak{M}\colon\ \varkappa_{0,t}(-T^t x) = 1 \text{ для всех } t > 0\},$$

т. е. множество таких точек x, что носитель плоского слоя, содержащего точку x не расширяется (и не искривляется) по одному из направлений в точке $\pi(x)$ под действием T^t для всех $t > 0$. Очевидно, W полуинвариантно: $T_1^n W \subset W$ при $n > 0$. Поскольку $B(x) > 0$ почти всюду на $\mathfrak{M}$, то $\mu_1(W) = 0$ и W нигде не плотно в $\partial\mathfrak{M}$. Из условия А немедленно вытекает, что множество $T_1^2 R \cap W$ имеет нулевой риманов объем на R. Это же следует и из условия Б, так как в противном случае точки $x \in T_1^2 R \cap W$ вместе со своими ЛУМ образуют множество положительной μ_1-меры в $\partial\mathfrak{M}$ (в силу абсолютной непрерывности трансверсальных слоений; см. [2], [31]), но это множество притягивается к W при $n \to \infty$, что противоречит условию $\mu_1(W) = 0$.

Выведем условие А из условия Б. Пусть $x \in T_1^2 R \setminus W$ и $V(x)$ — ее малая окрестность в $\mathfrak{M}$. Объединение ЛУМ точек $y \in (T_1^2 R \setminus W) \cap V(x)$ образует множество положительной μ_1-меры в $\partial\mathfrak{M}$ в силу абсолютной непрерывности трансверсальных слоений. По теореме Пуанкаре о возвращении [2] почти каждая точка y этого объединения (в смысле меры μ_1) возвращается в окрестность $V(x)$ бесконечное число раз, поэтому $\varkappa_{t,\,0}(-T^t y) \to \infty$ при $t \to \infty$. Следовательно, для почти каждой точки $y \in T_1^2 R$ (в смысле римановой метрики на $T_1^2 R$) выполнено $\varkappa_{t,0}(-T^t y) \to \infty$ при $t \to \infty$, что эквивалентно условию A согласно соотношению (7).

Следовательно, из условий А или Б вытекает соотношение $\varkappa_{t,\,0}(-T^t y) \to \to \infty$ при $t \to \infty$ для почти всех точек $y \in T_1^2 R$ в смысле римановой метрики на $T_1^2 R$. Поэтому для таких точек $y \in T_1^2 R$ найдется окрестность $V_1(y)$ в $\mathfrak{M}$ такая, что $\varkappa_{t,\,0}(-T^t y') > \Lambda^{m_1+2}$ при $t > t_1^2(y)$ для всех $y' \in V_1(y)$. Далее, найдется меньшая окрестность $V_2(y) \subset V_1(y)$ такая, что $\varkappa_{t,\,\delta}(-T^t y') > > \Lambda^{m_2+2}$ при $t > t_2(y)$ для всех $y' \in V_2(y)$ и $\delta < \delta_2(y)$. Это означает, что множество $T_1^{n-1} U_{0,\,n,\,m_1}$ не пересекается с $T_1^{-2} V_2(y)$ для всех $\delta < \delta_2(y)$ и $n \geqslant \geqslant n_2(y)$ (n_2 зависит от t_2). Отсюда следует, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ найдутся $\delta_0 > 0$ и $n_0 > 0$ и окрестность $V_0(R)$ многообразия R в $\partial\mathfrak{M}$ такие, что

$$\mu_1 (V_0 (R) \cap (\bigcup_{n=n_0}^{\infty} T_1^{n-1} U_{0,\,n,\,m_1})) < \varepsilon_0 \delta$$

для всех $\delta < \delta_0$, что противоречит соотношению (12).

Итак, соотношение (11) доказано. Рассмотрим теперь подробнее точки $y \in \{r(y) < c_2\delta\} \setminus U_{0\omega}$.

Как и раньше, $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ обозначает последовательность моментов отражений от края. Для $t > t_{F(\delta)}$ и $s > 0$ возьмем ЛМ $\Sigma_{0,\,s}^{(t)}$, введенное при доказательстве леммы 4. Для $y \notin U_{0\omega}$ размер по каждому направлению $\pi(\Sigma_{0,\,t-t_{F(\delta)}}^{(t)})$ не меньше чем $c_2 \delta \varkappa_{F(\delta),\,c_2\delta}^{-1}(y)$. Доказательство этого утверждения совершенно аналогично доказательству леммы 3. Поэтому $\Sigma_{0,\,t}^{(t)}$ пересекается при всех t с многообразием разрыва $T_{0,\,t}^{tF(\delta)}$, и $\pi_1 \Sigma_{0,\,t}^{(t)}$ пересекается с многообразием разрыва $T_1^{F(\delta)}$, и расстояние между ним и точкой y в метрике многообразия $\pi_1 \Sigma_{0,\,t}^{(t)}$ меньше чем $\sqrt{d\delta}$. Ввиду непрерывности T_1 и его степеней в точке x_1 мы можем выбрать $U_1(x_1)$ настолько малой, что расстояние между касательными пространствами к ЛМ $\pi_1 \Sigma_{0,\,t}^{(t)}$ и к соответствующему многообразию разрыва будет меньше любого наперед заданного $\varepsilon_1 > 0$ [1]). Тогда расстояние между y и соответствующим многообразием разрыва для $T_1^{F(\delta)}$ не больше чем $\varepsilon_2 \delta$, где $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$ может быть сделано произвольно малым, если $U_1(x_1)$ достаточно мала. Таким образом, все точки $y \in \{r(y) < c_2\delta\} \setminus U_{0\omega}$ лежат в $\varepsilon_2\delta$-окрестности многообразий разрыва $T_1^{F(\delta)}$.

Теперь мы можем явно построить требуемые множества $\mathfrak{A}_1^{(\delta)}$ и $\mathfrak{A}_0^{(\delta)}$. Пусть параллелограмм $G_i^{(\delta)}$ пересекает не более одного многообразия разрыва $T_1^{\pm F(\delta)}$, которое мы обозначим через $\Sigma^{(i)}$. Положим $G_i^{(\delta)} \subset \mathfrak{A}_1^{(\delta)}$, если $\mu_1 (G_i^{(\delta)} \cap U_1^{(0)}) \geqslant (1 - \varepsilon_3) \mu_1 (G_i^{(\delta)})$. Здесь ε_3 — постоянная, определяемая величиной c_1 в условии а) леммы 2, при которой условие а) выполнено. При этом $U_1(x_1)$, а следовательно, и константа ε_2, выбираются настолько малыми, что суммарная мера $\delta\varepsilon_2$-окрестностей границы $\partial G_i^{(\delta)}$ и пересечения много-

---

[1]) Здесь под расстоянием между касательными пространствами, о которых идет речь, понимается следующее: рассматривается пересечение каждого пространства с единичной сферой; далее для точек первого из полученных пересечений берется расстояние до ближайшей точки второго пересечения и затем рассматривается максимум из этих расстояний.

образия $\Sigma^{(i)}$ с параллелограммом $G_i^{(\delta)}$ не будет превосходить $\frac{1}{2}\varepsilon_3\mu_1(G_i^{(\delta)})$ для любых δ и $G_i^{(\delta)}$.

Если $G_i^{(\delta)} \notin \mathfrak{A}_1^{(\delta)}$, то либо $G_i^{(\delta)}$ пересекается не менее чем с двумя многообразиями разрыва $T_1^{\pm F(\delta)}$, т. е. $G_i^{(\delta)} \in \mathfrak{A}_{00}^{(\delta)}$, либо $\mu_1(U_{0\omega} \cap G_i^{(\delta)}) \geqslant \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_3\mu_1(G_i^{(\delta)})$. В соответствии со свойством в) покрытий $\{G_i^{(\delta)}\}$ и с оценкой (9) мера таких параллелограммов равна $\delta\varphi_4(\delta)$, где $\varphi_4(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Лемма 3 доказана.Тем самым доказательство теоремы 5 также завершено.

Теорема 5 допускает следующее обобщение. Предположим, что $x \in \mathfrak{M}_1$ принадлежит в точности одному многообразию разрыва T_1^k, $k \neq 0$. Не уменьшая общности, можно считать, что x принадлежит многообразию разрыва Σ_{k_0} преобразования $T_1^{k_0}$, $k_0 > 0$, и x есть неособая точка Σ_{k_0}. Тогда Σ_{k_0} делит окрестность $U(x) \subset \mathfrak{M}_1$ на две части U_1 и U_2, и в таком случае можно определить операторы $B^{(1)}(x)$, $B^{(2)}(x)$ как пределы $B(y)$, когда $y \to x$, оставаясь либо в U_1, либо в U_2. Предположим, что $B(-x) > 0$, $B^{(i)}(x) > 0$ для $i = 1, 2$.

Т е о р е м а 5'. *При описанных выше условиях достаточно малая окрестность точки x принадлежит* mod 0 *одной эргодической компоненте.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U(x)$ настолько мала, что $B(\pm y) > 0$ для всех $y \in U(x) \cap \mathfrak{M}'$. Из доказательства теоремы 5 легко следует, что U_1 и U_2 принадлежат mod 0 одной эргодической компоненте.

При доказательстве теоремы 5 мы анализировали свойства ЛНМ $W^{(u)}(y)$. При этом было показано, что множество точек $y \in U(x)$, не имеющих ЛНМ $W^{(u)}(y)$ размера δ, распадается на две части. Мера первой части есть $\delta\varphi(\delta)$, где $\varphi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Вторая часть лежит в $\varepsilon\delta$-окрестности многообразий разрыва $T_1^{-F(\delta)}$, где $F(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$, а ε можно сделать произвольно малым, если $U(x)$ достаточно мало.

Многообразие Σ_{k_0} в малой окрестности $U(x)$ пересекается с многообразиями разрыва T_1^n при $n < 0$ трансверсально, поскольку Σ_{k_0} расслаивается на строго выпуклые ЛМ, а другие многообразия разрыва расслаиваются на строго вогнутые ЛМ. Следовательно, в точке пересечения соответствующие касательные пространства порождают все касательное пространство, отвечающее точке пересечения. Поэтому функция $F(\delta)$ может стремиться к бесконечности настолько медленно, что мера пересечения δ-окрестности Σ_{k_0} и δ-окрестностей многообразий разрыва $T_1^{-F(\delta)}$ имеет вид $\delta\varphi_4(\delta)$, где $\varphi_4(\delta) \to \to 0$ при $\delta \to 0$. Но тогда при достаточно малых δ многообразие Σ_{k_0} пересекает множество положительной меры, состоящее из ЛНМ, связывающих U_1 и U_2. Теорема 5' доказана.

Отметим, что теоремы 5 и 5' позволяют доказать эргодичность рассеивающих биллиардов в ограниченных d-мерных областях евклидова пространства и на d-мерном торе, $d \geqslant 2$. Действительно, для этих биллиардов любая точка края $\partial\mathfrak{M}$ (кроме конечного множества особых точек), отражается бесконечное число раз от рассеивающих компонент ∂Q. Поэтому условие А для этих биллиардов всегда выполнено и теоремы 5 и 5' справедливы. Следовательно, любая точка края фазового пространства $\partial\mathfrak{M}$, кроме тех, чья траектория $T_1^n x$ дважды пересекает многообразие разрыва автоморфизма T_1 при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, обладает окрестностью, почти целиком лежащей в одной эргодической компоненте автоморфизма T_1. Поэтому эти точки образуют множество M^+, дополнение к которому состоит из счетного числа подмногообразий коразмерности 2 в $\partial\mathfrak{M}$, т. е. множество M^+ линейно связно. Любые две точки множества M^+ можно соединить путем, лежащим в M^+, и весь путь в силу компактности покрыть конечным числом открытых множеств, каждое из которых почти целиком лежит в одной из эргодических компонент автоморфизма T_1, поэтому и их объединение почти целиком лежит в одной эргодической компоненте автоморфизма T_1. Это доказывает эргодичность автоморфизма T_1.

§ 5. Эргодичность некоторых систем трех дисков

Прежде всего заметим, что все утверждения из § 2—4 справедливы для систем дисков различных радиусов — соответствующие изменения касаются только формул для цилиндров (1).

Рассмотрим систему трех дисков радиусов $r_1 = r_2 = 1/8$ и $r_3 = 1/2$, центры которых расположены в точках $O_1 = (3/8, 1/2)$, $O_2 = (5/8, 1/2)$, $O_3 = (0, 0)$ (рис. 3). В этом положении диски одновременно касаются друг друга в пяти точках A_1 — A_5. Мы будем изучать движение дисков для значений параметров r_i и O_i, достаточно близких к указанным [1]). Для таких значений параметров при движении дисков их центры всегда будут находиться в малой окрестности исходных положений и движение фактически сведется к преобразованию векторов скорости. Мы покажем, что для достаточно малой окрестности значений r_i, O_i в пространстве параметров система трех дисков не имеет вырождений в фазовом пространстве, т. е. $W = \varnothing$ в обозначениях § 4, теорема 5. Для этого достаточно показать, что $j(x) \equiv 3$ всюду в фазовом пространстве.

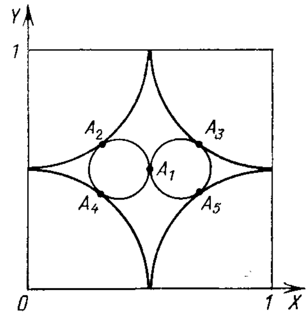

Рис. 3

Введем в конфигурационном пространстве Q систему координат $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$, где x_i, y_i — координаты центра i-го диска. Рассмотрим произвольную точку x фазового пространства и ее траекторию $\{T^t x\}$. Обозначим $(u_i^{(m)}, v_i^{(m)})$ вектор скорости i-го диска после m-го столкновения. Если p_m и q_m — номера дисков, участвующих в m-м столкновении, то координаты введенного в § 3 вектора e_m задаются формулами

$$p_m = 1, \quad q_m = 2: \ (v_1^{(m)} - v_2^{(m)},\ u_2^{(m)} - u_1^{(m)},\ v_2^{(m)} - v_1^{(m)},\ u_1^{(m)} - u_2^{(m)},\ 0,\ 0),$$
$$p_m = 1, \quad q_m = 3: \ (v_1^{(m)} - v_3^{(m)},\ u_3^{(m)} - u_1^{(m)},\ 0,\ 0,\ v_3^{(m)} - v_1^{(m)},\ u_1^{(m)} - u_3^{(m)}),$$
$$p_m = 2, \quad q_m = 3: \ (0,\ 0,\ v_2^{(m)} - v_3^{(m)},\ u_3^{(m)} - u_2^{(m)},\ v_3^{(m)} - v_2^{(m)},\ u_2^{(m)} - u_3^{(m)}).$$

Иными словами, вектор e_m получается из вектора скорости системы $(u_1^{(m)}, v_1^{(m)}, u_2^{(m)}, v_2^{(m)}, u_3^{(m)}, v_3^{(m)})$ проектированием на двумерное подпространство $D^{(p_m, q_m)}$ в $\mathbb{R}^6$ и поворотом на 90° в этом подпространстве. Пространства $D^{(p,q)}$ задаются направляющими векторами $r_1^{(p,q)}$, $r_2^{(p,q)}$ с координатами $r_1^{(1,2)} = (1, 0, -1, 0, 0, 0)$, $r_2^{(1,2)} = (0, 1, 0, -1, 0, 0)$, $r_1^{(2,3)} = (0, 0, 1, 0, -1, 0)$, $r_2^{(2,3)} = (0, 0, 0, 1, 0, -1)$. Обозначим $D_m = D^{(p_m, q_m)}$. Согласно (5) вектор $e_m^{(+)} = U_1 \ldots U_m e_m$ лежит в пространстве $D_m^{(+)} = U_1 \ldots U_m D_m$. Если размерность пространства $J_+(x)$ из (5) меньше трех, то пространства $D_1^{(+)}$, $D_2^{(+)}$ таковы, что в шестимерном евклидовом пространстве, задаваемом координатами $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ найдется двумерное подпространство L_2, которое имеет общий ненулевой вектор с каждым из $D_m^{(+)}$, $m \geqslant 1$. Очевидно, для пространства $D_m^{(+)}$ $(m = 1, \ldots, k)$ общего положения это невозможно при достаточно больших k.

Для исследования конкретной ситуации достаточно рассмотреть $k = 13$ и перебрать конечное число вариантов попарных столкновений дисков при $m = 1, 2, \ldots, 13$. При этом пространство D_m принимает одно из трех значений $D^{(1,2)}$, $D^{(1,3)}$, $D^{(2,3)}$, а оператор U_m — одно из пяти в соответствии с тем, в окрестности какой из точек A_1 — A_5 произошло m-е столкновение дисков. Матрицы операторов U_m вычисляются в предельном случае $r_1 = r_2 = 1/8$, $r_3 = 1/2$, и полученные результаты остаются верными в некоторой окрестности этих значений r_i. Таким образом, задача свелась к конкретному перебору конечного числа вариантов попарных столкновений дисков.

---

[1]) Идея изучения этого случая была высказана нам Л. А. Бунимовичем.

Для данной системы численный анализ всех вариантов (их оказалось несколько сотен) был сделан на ЭВМ, в результате чего были выделены 10 вариантов, в которых расположение пространств $D_m^{(+)}$ ($m = 1, \ldots, 13$) допускало наличие двумерного пространства L_2, имеющего общие ненулевые векторы со всеми $D_m^{(+)}$. Далее, в каждом из этих 10 вариантов было найдено множество начальных значений векторов скорости u_i, v_i, для которых соответствующее пространство $J_+(x)$ было бы двумерным. В силу (5) пространство $J_+(x)$ совпадает с L_2, поэтому искомое множество векторов скорости $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$ является двумерным подпространством V_2 в $\mathbb{R}^6$, задаваемым условиями ортогональности к L_2 и равенства нулю полного импульса системы. Зная номера сталкивающихся дисков при $m = 1, 2, \ldots, 13$, мы можем исключить из V_2 некоторые области из условия неотрицательности скалярного произведения вектора относительной скорости сталкивающихся дисков и вектора их линии центров. Это условие необходимо для реализации самой возможности столкновения, а векторы линии центров для предельных значений $r_1 = r_2 = 1/8$, $r_3 = 1/2$ вычисляются явно. После этого только в пяти вариантах из 10 в пространстве V_2 остаются ненулевые векторы. Эти пять вариантов вырожденных траекторий мы проанализируем явно.

1. Векторы скорости дисков имеют вид $(8t_1, t_2 + 9t_1)$, $(8t_1, -2t_2)$, $(-16t_1, t_2 - 9t_1)$, столкновения дисков происходят около точек A_1 и A_2 (поочередно). В этом варианте все столкновения близки к касаниям, т. е. преобразования векторов скорости почти не происходит, поэтому через конечное число таких столкновений произойдет столкновение в окрестности одной из точек $A_3 - A_5$, что нарушит «вырожденность» этой траектории. Еще два варианта являются частными случаями этого при $t_1 = 0$, когда допускаются столкновения в окрестностях точек A_1, A_2, A_4 (в произвольном порядке).

2. Векторы скорости имеют вид $(-4t, 3t)$, $(-4t, 3t)$, $(8t, -6t)$, столкновения происходят около точек A_1, A_3, A_4 в произвольном порядке. Здесь также все столкновения близки к касаниям, поэтому «вырожденность» нарушится по тем же соображениям, что и в варианте 1.

3. Векторы скорости имеют вид $(24t, 7t)$, $(24t, 7t)$, $(-48t, -14t)$, $t > 0$, столкновения происходят последовательно около точек A_1, A_3, A_5, A_1, A_2, A_4, и далее этот цикл повторяется. В указанном цикле на участке (A_1, A_2, A_4, A_1) вектор относительной скорости дисков 1 и 2 принимает последовательно значения $(-72t, 0)$, $(-36t, -48t)$ и $(0, 0)$, т. е. диски 1 и 2 на участках (A_1, A_2) и (A_2, A_4) расходятся, а на участке (A_4, A_1) имеют близкую к нулю относительную скорость. Поэтому их второе столкновение возможно лишь при условии, что время движения на участке (A_1, A_2, A_4) пренебрежимо мало по сравнению с временем движения на участке (A_4, A_1). Но тогда на последнем участке третий диск, двигаясь со скоростью $(-72t, -21t)$ относительно первых двух, отойдет на значительное расстояние от первого диска, и, поскольку три следующих удара в окрестности точек A_3, A_5, A_1 должны произойти за относительно короткий промежуток времени, диски 1 и 3 не сблизятся и движение на следующем участке (A_1, A_2, A_4) потребует относительно большого промежутка времени. Это приведет к увеличению расстояния между дисками 1 и 2 и к невозможности их повторного столкновения вслед за A_4, так как их относительная скорость будет вновь близка к нулю. Таким образом, при заданных начальных векторах скорости цикл $(A_1, A_3, A_5, A_1, A_2, A_4)$ не может повториться более двух раз, после чего «вырожденность» неизбежно нарушится.

Проведенный выше анализ показывает, что найдется константа $\Lambda > 1$ такая, что для каждой точки x фазового пространства рассматриваемой системы будет выполнено $\varkappa_{t,0}(x) > \Lambda$ для некоторого $t = t(x) > 0$. Отсюда $W = \varnothing$, и условия A, B в теоремах 5, 5′ выполнены, т. е. эти теоремы справедливы для каждой точки $x \in \partial\mathfrak{M}$ края фазового пространства, кроме тех, траектория $T_1^n x$ которых попадает на многообразие разрыва R дважды при

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Но такие точки образуют счетное число подмногообразий коразмерности 2 в $\partial\mathfrak{M}$, поэтому дополнение к ним линейно связно и в силу теорем 5 и 5′ образует одну эргодическую компоненту автоморфизма T_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны//Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1967.— Т. 90.

[2] Аносов Д. В., Синай Я. Г. Некоторые гладкие эргодические системы//УМН.— 1967.— Т. 22, вып. 5.— С. 107—172.

[3] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике//УМН.— 1963.— Т. 18, вып. 6.— С. 91—192.

[4] Боголюбов Н. Н., Хацет Б. И. О некоторых математических вопросах теории статистического равновесия//ДАН СССР.— 1949.— Т. 66, № 3.— С. 321—324.

[5] Боголюбов Н. Н., Петрина Д. Я., Хацет Б. И. Математическое описание равновесного состояния классических систем на основе формализма канонического ансамбля//ТМФ.— 1969.— Т. 1, № 2.— С. 251—274.

[6] Больцман Л. Лекции по теории газов.— М.: Гостехиздат.— 1956.

[7] Брин М. И., Песин Я. Б. Частично гиперболические динамические системы//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974.— Т. 38, № 1.— С. 170—212.

[8] Бунимович Л. А., Синай Я. Г., Об основной теореме теории рассеивающих бильярдов//Мат. сб.— 1973.— Т. 90, № 3.— С. 415—431.

[9] Добрушин Р. Л. Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности//Теор. вер.— 1968.— Т. 13, № 2.— С. 201—229.

[10] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука.— 1980.

[11] Крылов Н. С. Работы по обоснованию статической физики.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950.

[12] Куратовский К. Топология.— М.: Мир. 1966.

[13] Песин Я. Б. Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория//УМН.— 1977.— Т. 32, вып. 4.— С. 55—111.

[14] Рохлин В. А. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой//УМН.— 1967.— Т. 22, вып. 5.— С. 3—56.

[15] Рохлин В. А., Синай Я. Г. Построение и свойства инвариантных измеримых разбиений//ДАН СССР.— 1961.— Т. 141, № 5.— С. 1038—1041.

[16] Рюэлль Д. Статистическая механика. Строгие результаты.— М.: Мир, 1971.

[17] Синай Я. Г. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики//ДАН СССР.— 1963.— Т. 153, № 6.— С. 1261—1264.

[18] Синай Я. Г. Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром II//Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1966.— Т. 30, № 1.— С. 15—68.

[19] Синай Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов//УМН.— 1970.— Т. 25, вып. 2.— С. 141—191.

[20] Синай Я. Г. Эргодические свойства газа Лоренца//Функцион. анализ и его прил. 1979.— Т. 13, вып. 3.— С. 46—59.

[21] Синай Я. Г. Биллиардные траектории в многогранном угле//УМН.— 1978.— Т. 33, вып. 1.— С. 229—230.

[22] Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— Т. 2.— М.: Изд-во ВИНИТИ, 1985.

[23] Хопф Э. Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны//УМН.— 1949.— Т. 4, вып. 2.— С. 129—170.

[24] Чернов Н. И. Построение трансверсальных слоев в многомерных полурассеивающих бильярдах//Функцион. анализ и его прил.— 1982.— Т. 16, вып. 4.— С. 35—46.

[25] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. Markov partitions for dispersed billiards//Comm. Math. Phys.— 1980.— V. 73, № 2.— P. 247—280.

[26] Bunimovich L. A., Sinai Ya. G. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers//Comm. Math. Phys.— 1981.— V. 78, № 4.— P. 479—497.

[27] Federer H. Curvature measures//Trans. Amer. Math. Soc.— 1959. V. 93.— P. 418—491.

[28] Gallavotti G., Ornstein D. Billiards and Bernoulli schemes//Comm. Math. Phys.— 1974.— V. 38, № 2.— P. 83—101.

[29] Hadamard J. Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations differentieeles//Bull. Soc. Math. France.— 1901.— V. 29. P. 224—228.

[30] Hedlund G. The dynamics of geodesic flows//Bull. Amer. Math. Soc.— 1939.— V. 45, № 4.— P. 241—260.

[31] Katok A., Strelcyn J. M. Smooth Maps with Singularities: invariant manifolds, entropy and billiards.— Preprint, Univ. Paris-Nord.— 1980.

[32] Lanford O. E., Ruelle D. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanical//Comm. Math. Phys.— 1969.— V. 13, № 3.— P. 194—215.

[33] Morse M., Symbolic Dynamics. Mimeographed notes by R. Oldenberger.— Princeton: Institute for Advanced Study.— 1966.

[34] Sinai Ya. G. Development of Krylov's ideas.— Afterwords to Krylov N. S. Works on the foundations of statistical Physics. Princeton Univ. Press.— 1979. P. 239—281.

Институт теоретической физики
им. Л. Д. Ландау АН СССР
ОИЯИ г. Дубна

Поступила в редакцию
1 июня 1985 г. (новый
вариант — 23 февраля 1987 г.)