Функциональный анализ и его приложения,
1982, т. 16, вып. 4, 35—46.

УДК 517.919.2

ПОСТРОЕНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ СЛОЕВ В МНОГОМЕРНЫХ ПОЛУРАССЕИВАЮЩИХ БИЛЬЯРДАХ

Н. И. Чернов

§ 1. Введение

Одним из важных классов динамических систем являются системы бильярдного типа (бильярды), которые порождаются движением частицы в d-мерной области евклидова пространства или d-мерного евклидова тора T^d, из которого вырезано открытое подмножество U, причем граница области кусочно-гладкая. Мы будем обозначать эту область через Q. Бильярдная частица движется прямолинейно с единичной скоростью внутри Q и отражается от границы ∂Q по закону «угол падения равен углу отражения».

Наиболее сильными эргодическими свойствами обладают так называемые рассеивающие бильярды, т. е. такие, что гладкие компоненты границы ∂Q строго выпуклы внутрь области Q. В силу этого свойства границы близкие траектории системы расходятся с экспоненциальной скоростью, как и в случае гладких гиперболических систем. Для таких бильярдных систем доказаны свойства эргодичности, перемешивания и K-свойство (см. [1], [2], [10]), а также в ряде случаев исследована скорость убывания корреляций с помощью метода марковских разбиений (см. [11], [12]).

В данной работе изучаются бильярдные системы, край ∂Q которых является нестрого выпуклым внутрь, т. е. возможны подпространства плоских направлений с нулевой кривизной. Такие бильярды называются полурассеивающими. Типичным примером служит модель газа твердых сфер. Для этой системы конфигурационным пространством служит dN-мерный куб V^N (dN-мерный тор T^{dN}), из которого вырезаны цилиндры в $\mathbf{R}^{dN}$ (см. [5], [6]). Каждый цилиндр представляет собой прямое произведение $(d-1)$-мерной сферы на евклидово пространство $\mathbf{R}^{d(N-2)}$. Другие примеры можно получить, рассматривая систему твердых сфер, разбитую на несколько невзаимодействующих групп, а также системы твердых сфер на торе.

Эргодические свойства полурассеивающих бильярдов могут зависеть от свойств края, точнее, эргодические свойства определяются непараллельностью плоских направлений границы бильярда в различных ее точках. Например, система двух твердых сфер на торе T^2 обладает первым интегралом (полный импульс) и неэргодична, в то время как такая же система на квадрате эргодична и является K-системой (см. [1]).

Так же, как и в случае гиперболических систем, эргодические свойства полурассеивающих бильярдов исследуются с помощью трансверсальных слоений, которые представляют собой обобщение хорошо известных орисферических слоений в случае геодезических потоков в пространствах отрицательной кривизны (см. [13], [14]).

В случае рассеивающих бильярдов, как и в геодезических потоках, размерность слоений равна $d-1$, где d — размерность конфигурационного пространства. В полурассеивающих бильярдах размерность слоений может быть меньше в зависимости от свойств края ∂Q.

Цель данной работы — исследование трансверсальных слоений и вычисление их размерности для общих полурассеивающих бильярдов.

Перейдем к точным формулировкам. Обозначим M фазовое пространство и $\{T^t\}$ динамику полурассеивающего бильярда в некоторой области Q в d-мерном евклидовом пространстве. Точкой $x \in M$ является пара $x=(q, v)$, где $q \in Q$ и $v \in S^{d-1}$ (единичный вектор скорости), причем точки $x \in Q \times S^{d-1}$, траектории которых проходят через точки пересечения гладких компонент края ∂Q, исключены из пространства M. Естественную проекцию пространства M на область Q обозначим π и точку $\pi(x) \in Q$ назовем носителем точки $x \in M$. Область Q должна удовлетворять некоторым условиям, которые приводятся в § 2 (см. так же [5], с. 132).

Бильярдная система $\{T^t\}$ сохраняет меру $d\mu(x)=dl(q) \times d\omega_q$, где $dl(q)$ — мера Лебега в области Q и $d\omega_q$ — мера Лебега на $(d-1)$-мерной сфере $S^{d-1}(q)=\pi^{-1}(q)$.

Для каждой точки $x=(q, v) \in M$ обозначим $J(x)$ гиперпространство в $\mathbf{R}^d$, содержащее точку q и ортогональное вектору v. В пространстве $J(x)$ введем линейный оператор $B(x)$, определяемый формулой

$$B(x)=\cfrac{I}{\tau_1 I+\cfrac{I}{2\cos\varphi_1 V_1^* K_1 V_1+U_1^{-1}\cfrac{I}{\tau_2 I+\cfrac{I}{2\cos\varphi_2 V_2^* K_2 V_2+\ldots}}U_1}}, \tag{1}$$

в правой части которой записана операторная цепная дробь (значения входящих в эту формулу величин и операторов подробно объясняются в § 3). Фактически эта цепная дробь определяет решение уравнения Якоби для бильярдных систем. В § 5 доказывается, что оператор $B(x)$ задает касательную плоскость к трансверсальному слою в фазовом пространстве. В [8] доказано, что дробь $B(x)$ сходится почти всюду в M и определяет симметричный неотрицательно определенный оператор в $J(x)$. Эти свойства позволяют разложить $J(x)$ в ортогональную сумму двух $B(x)$-инвариантных подпространств $J_0(x)$ и $J_+(x)$, соответственно нулевого и положительного для оператора $B(x)$.

Рассмотрим функцию $j(x)=\dim J_+(x)$, определенную почти всюду на M. Обозначим M^C множество точек $x \in M$, в окрестности которых функция $j(x)$ постоянна. В § 3 будет показано, что это множество открыто и плотно в области определения оператора $B(x)$. Обозначим $\hat{M}$ множество точек $x \in M$, для которых найдется $t \geqslant 0$, при котором $\hat{x}(x)=T^t x \in M^C$. Ясно, что $M^C \subset \hat{M}$ и множество $\hat{M}$ инвариантно относительно действия $\{T^t\}$.

В параграфах 2—5 доказывается

Теорема 1. *Пусть $x_0=(q_0, v_0) \in \hat{M}$. В некоторой окрестности U_{x_0} точки x_0 существует многообразие $W \subset \hat{M}$ размерности $j(\hat{x}(x_0))$ с носителем $\widetilde{W}=\pi(W)$, обладающее следующими свойствами:*

(1) $x_0 \in W$ и траектории точек многообразия W под действием $\{T^t\}$ сближаются с экспоненциальной скоростью при $t \to \infty$;

(2) если $\dim \widetilde{W}=j(x)$ для некоторой точки $x=(q, v) \in W$, то касательное пространство $\mathcal{T}_q \widetilde{W}$ к поверхности $\widetilde{W}$ совпадает с $J_+(x)$;

(3) *пусть* $x = (q, v)$ *и* $x' = (q + dq, v + dv)$ — *близкие точки на* W; *совместим начало вектора* dv *с точкой* q, *тогда* $dv \in \mathcal{T}_q \widetilde{W}$ *и* $dv = B(x)dq$.

Такое многообразие W называется локально трансверсальным слоем (ЛТС) (см. [2], [8]).

Сформулируем два следствия теоремы 1.

Следствие 1. *Энтропия полурассеивающего бильярда положительна.*

Следствие 2. *Группа унитарных операторов, порожденная полурассеивающим бильярдом, имеет счетнократную лебеговскую компоненту в спектре.*

Следствие 1 доказывается в § 5, следствие 2 вытекает из результатов главы 13 в [5] (см. так же [8]).

§ 2. Свойства типичных фазовых траекторий

Мы будем предполагать, что конфигурационное пространство Q полурассеивающего бильярда удовлетворяет следующим условиям (см. так же [5]):

1. Граница ∂Q области Q кусочно-гладкая, состоящая из конечного числа регулярных (гладких) компонент $\partial Q_1^{(0)}, \partial Q_2^{(0)}, \ldots, \partial Q_r^{(0)}$.

2. В точках пересечения двух и более компонент границы $\partial Q_i^{(0)}$ вектора нормали к ним линейно независимы.

3. Оператор второй квадратичной формы $K(q)$ поверхности ∂Q по отношению к нормали, направленной внутрь области Q, неотрицательно определен в регулярных точках $q \in \partial Q$.

Свойство 3 означает, что граница ∂Q выпукла внутрь области Q. Край $\partial M = \partial Q \times S^{d-1}$ фазового пространства M будет кусочно-гладким с регулярными компонентами $\partial M_i^{(0)} = \partial Q_i^{(0)} \times S^{d-1}$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Обозначим

$$\partial M^{(0)} = \bigcup_{i=1}^{r} \partial M_i^{(0)} \quad \text{и} \quad M_1 = \{x \in \partial M^{(0)}: \ (n(q), \ x) \geqslant 0, \quad q = \pi(x)\},$$

где $n(q)$ — единичный вектор нормали к ∂Q в точке q, направленный внутрь области Q. Для каждого $x \in M_1$ определим $T_1 x = T^{s+0} x$, где $s > 0$ — первый момент отражения траектории $T^t x$ точки x от края ∂Q. Преобразование T_1 на M_1 сохраняет меру $d\mu(x) = (n(q), x)\, dl(q)\, d\omega_q$, где $dl(q)$ — риманов объем на поверхности ∂Q и $d\omega_q$ — мера Лебега на $(d-1)$-мерной полусфере $S_+^{d-1}(q) = \{v \in S^{d-1}: \ (v, \ n(q)) \geqslant 0\}$ (см. [5]). Обозначим через

$$S = \{x \in \partial M \setminus \partial M^{(0)}\} \bigcup \{x \in \partial M^{(0)}: \ (n(q), \ x) = 0, \quad q = \pi(x)\} \quad (2)$$

множество особых точек края.

Для существования ЛТС в точке $x \in M$ необходимо, чтобы траектория точки x удовлетворяла некоторым условиям, которые формулируются ниже. Множество M^T точек, удовлетворяющих этим условиям, имеет полную меру, что позволяет назвать траектории этих точек типичными в фазовом пространстве M.

Условие Т.1. *Найдется такая точка* $\hat{x} \in M$, *что для всякой окрестности* $U \subset M$ *точки* $\hat{x}$ *найдется положительное* $\rho = \rho(U)$, *при котором число возвращений траектории* $T^t x$ *в окрестность* U *на интервале времени* $(0, T)$ *не меньше* ρT *для всех достаточно больших* T.

Условие Т.2. *Траектория* $T^t x$ *не подходит слишком близко к особым точкам края, что означает следующее. Для произвольных* $\hat{c} > 0$, *и* $i \geqslant 2$ *рассмотрим в* $\mathbf{R}^d$ *цилиндр* $Z_i(\hat{c})$ *радиуса* $\hat{c} i^{-2}$, *ось которого проходит по отрезку траектории* $T^t x$ *между* $(i-1)$*-м и* i*-м отражениями от границы* ∂Q. *Условие* Т.2 *состоит в том, что найдется такое положитель-*

ное $\hat{c} = \hat{c}(x)$, *при котором для каждого* $i \geqslant 2$ *связная компонента цилиндра* $Z_i(\hat{c})$, *лежащая в области* Q *вокруг* i*-го отрезка траектории* $T^t x$, *пересекается ровно с двумя регулярными компонентами границы* ∂Q.

Совокупность фигурирующих в условии Т.2 цилиндров будем называть системой коридоров радиуса $\hat{c} i^{-2}$ вокруг траектории точки x. Обозначим эту систему Θ_0.

Докажем полноту меры множества M^T. Для доказательства полноты меры множества точек, удовлетворяющих условию Т.1, положим $\hat{x} = x$ и рассмотрим характеристическую функцию χ_U окрестности $U = U(x)$. В силу эргодической теоремы Биркгофа почти всюду существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} [\chi_U(y) + \chi_U(T^1 y) + \ldots + \chi_U(T^n y)] = g(y),$$

причем

$$\int_M g(y)\,\mu(dy) = \int_M \chi_U(y)\,\mu(dy) > 0.$$

Рассмотрим множество $U_0 = U \cap \{y\colon g(y) = 0\}$. Из теоремы Пуанкаре о возвращении легко показать, что $\mu(U_0) = 0$, т. е. $g(y) > 0$ почти всюду на U.

Для доказательства полноты меры множества точек, удовлетворяющих условию Т.2, перейдем к преобразованию T_1 края $M_1 \subset \partial M$. Рассмотрим множество $S \cup T_1^{-1} S$ (см. (2)). Пересечение этого множества с каждой регулярной компонентой края $\partial M_i^{(0)}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, состоит из конечного числа гладких компактных многообразий коразмерности 1 с краем. Риманов объем ε-окрестности такого многообразия не превосходит $\mathrm{const}\cdot\varepsilon$ при всех достаточно малых ε (см., например, [9]). Применение леммы Бореля—Кантелли дает необходимый результат (аналогичные оценки см. в [1]).

§ 3. Геометрия слоев в полурассеивающем бильярде

В данном параграфе приводятся необходимые в дальнейшем свойства гладких семейств бильярдных траекторий.

Пусть $\tilde{\Sigma}$ — произвольное C^2-гладкое ориентируемое многообразие коразмерности 1 без края в области Q и Σ — непрерывное семейство единичных векторов нормали к $\tilde{\Sigma}$ (таких семейств существует ровно два). Многообразие $\Sigma \subset M$ называется слоем с носителем $\tilde{\Sigma}$. Точки слоя Σ будем обозначать $(q, v(q))$, где $q \in \tilde{\Sigma}$ и $v(q)$ — вектор нормали к $\tilde{\Sigma}$.

Обозначим $B(q)$ оператор второй квадратичной формы многообразия $\tilde{\Sigma}$ в точке q относительно нормали $v(q)$. Если $B(q) \geqslant 0$ в каждой точке $q \in \tilde{\Sigma}$, то слой Σ называется выпуклым. В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать выпуклые слои.

При произвольном $t > 0$ рассмотрим образ $T^t \Sigma = \Sigma_t \subset M$ слоя Σ с носителем $\pi(\Sigma^t) = \tilde{\Sigma}_t$. Множество $\Sigma_t \setminus \partial M$ состоит из конечного числа слоев. Введем следующие обозначения. Если $T^t(q, v(q)) \notin \partial M$, то $T^t(q, v(q)) = (q_t, v(q_t))$ — точка, лежащая на некотором слое в Σ_t, и $B(q_t)$ — оператор второй квадратичной формы этого слоя в точке q_t. Если $T^t(q, v(q)) \in \partial M$, то можно рассматривать вектора $v(q_{t+0})$ и $v(q_{t-0})$, соответствующие движению до и после отражения, и операторы $B(q_{t+0})$ и $B(q_{t-0})$. Пространства, в которых действуют операторы $B(q_t)$, $B(q_{t\pm 0})$ обозначим соответственно $J(q_t)$, $J(q_{t\pm 0})$.

Следующие две леммы (см. [8]) устанавливают связь между операторами $B(q)$ и $B(q_t)$.

Л е м м а 1. *Пусть точка $(q, v(q))$ не испытала отражений от границы бильярда на интервале времени $[0, t]$. Тогда векторы $v(q)$ и $v(q_t)$ параллельны и плоскости $J(q)$ и $J(q_t)$ можно отождествить. При этом*

$$B(q_t) = B(q)(I + tB(q))^{-1}.$$

С л е д с т в и е. *В условиях леммы* 1

$$\|B(q_t)\| \leqslant 1/t.$$

Л е м м а 2. *Пусть траектория $T^t(q, v(q))$ испытала отражение от регулярной компоненты границы бильярда в момент времени s, т. е. $q_s \in \partial Q$. Тогда*

$$B(q_{s+0}) = U^{-1} B(q_{s-0}),\ U + 2(v(q_{s+0}), n(q_s))\, V^* K(q_s)\, V,$$

где $n(q_s)$ — вектор нормали к ∂Q в точке q_s, $K(q_s)$ — оператор второй квадратичной формы ∂Q, действующий в плоскости $\mathcal{T}_{q_s}$, U — проектор $J(q_{s+0})$ на $J(q_{s-0})$ параллельно вектору $n(q_s)$, V — проектор $J(q_{s+0})$ на $\mathcal{T}_{q_s}$ параллельно вектору $v(q_{s+0})$, V^* — проектор $\mathcal{T}_{q_s}$ на $J(q_{s+0})$ параллельно вектору $n(q_s)$.

С л е д с т в и е. *Если $B(q) \geqslant 0$, то $B(q_t) \geqslant 0$ при всех $t > 0$, т. е. образ выпуклого слоя всегда состоит из выпуклых слоев.*

Рассмотрим общий случай. Пусть точка $(q, v(q))$ на интервале времени $(0, t)$ испытала l отражений от границы ∂Q в моменты $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ $\ldots < t_l < t$. Для i-го отражения введем обозначения, соответствующие обозначениям леммы 2: $q_{t_i} = q_i \in \partial Q$ — точка отражения, $n(q_i)$ — вектор нормали к ∂Q, K_i — оператор второй квадратичной формы ∂Q в точке q_i, $U_i\ V_i$, V_i^* — соответствующие проекторы. Тогда из лемм 1 и 2 вытекает формула

$$B(q_t) = \cfrac{I}{(t - t_l)\,I + \cfrac{I}{2\cos\varphi_l V_l^* K_l V_l + U_l^{-1}\cfrac{I}{I + \cdots + U_1^{-1}\cfrac{B(q)}{I + t_1 B(q)}U_1}U_l}}, \qquad (3)$$

где $\cos\varphi_i = (v(q_{t_i+0}), n(q_i))$, а запись I/A означает A^{-1}.

Определим оператор $B(x)$, введенный в § 1 формулой (1). Пусть $x = (q, v)$ — произвольная точка множества M. Фиксируем некоторое $t > 0$. Рассмотрим плоскую площадку в Q, содержащую точку q_t и ортогональную вектору $v(q_t)$. Из точек этой площадки, близких к точке q_t выпустим пучок траекторий $\Sigma_0^{(t)}$, параллельный вектору $-v(q_t)$. Этот пучок при движении за время $s > 0$ перейдет в некоторый выпуклый слой $T^s\Sigma_0^{(t)} = \Sigma_s^{(t)}$, содержащий точку $(q_{t-s}, -v_{t-s})$. Обозначим выпуклый слой $\Sigma_t^{(t)}$ через Σ_t^*, а слой с противоположным оснащением векторами нормалей через $-\Sigma_t^*$. Слой $-\Sigma_t^*$ содержит точку x при всех $t > 0$.

Пусть точка x отражается от границы бильярда в моменты $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ Для i-го отражения будем использовать введенные ранее обозначения q_i, $n(q_i)$, K_i, U_i, V_i, V_i^*, $\cos\varphi_i$ и положим $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ $(t_0 = 0)$. Оператор $B^{(t)}(q)$ слоя Σ_t^* в точке q, согласно формуле (3), имеет вид

$$B^{(t)}(q) = \cfrac{I}{\tau_1 I + \cfrac{I}{2\cos\varphi_1 V_1^* K_1 V_1 + U_1^{-1} \cfrac{I}{\tau_2 I + \cdots + \cfrac{I}{2\cos\varphi_l V_l^* K_l V_l}} U_1}},$$

где индекс l определяется из соотношений $t_l < t \leqslant t_{l+1}$.

В [8] доказано, что при условии $\sum_{i=1}^{\infty} t_i^{-2} < \infty$ операторы $B^{(t)}(q)$ сходятся при $t \to \infty$ к оператору $B(x)$, который представим в виде операторной цепной дроби (1). Из условия Т.1 следует, что оператор $B(x)$ определен всюду на M^T.

Отметим, что все операторы $B(x)$, $B^{(t)}(q)$, $2\cos\varphi_i V_i^* K_i V_i$ симметричны и неотрицательно определены, а проекторы U_i изометричны. Это позволяет оценить степень приближения цепной дроби $B(x)$ нечетными подходящими дробями

$$B(x, k) = \cfrac{I}{\tau_1 I + \cfrac{I}{2\cos\varphi_1 V_1^* K_1 V_1 + U_1^{-1} \cfrac{I}{\tau_2 I + \cdots + \frac{1}{\tau_k} I} U_1}},$$

а именно:

$$\| B(x) - B(x, k) \| \leqslant \frac{1}{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_k}. \tag{4}$$

Из оценки (4) следует (см. также [6]) непрерывная зависимость оператора $B(x)$ от точки x в области определения.

Рассмотрим введенное в § 1 разложение

$$J(x) = J_0(x) \oplus J_+(x) \tag{5}$$

пространства $J(x)$ на два $B(x)$-инвариантных подпространства. Используя представление (2) оператора $B(x)$, можно вывести следующий факт:

Лемма 3. *Пусть w — произвольный вектор пространства $J(x)$. Тогда $w \in J_0(x)$ в том и только в том случае, если при всех $i \geqslant 1$ $K_i V_i U_{i-1} U_{i-2} \ldots U_1 w = 0$.*

Заметим, что в силу конечномерности пространства $J(x)$ достаточно выполнения конечного числа этих соотношений.

Рассмотрим на множестве M^T неотрицательную целочисленную функцию $j(x) = \dim J_+(x)$. Из леммы 3 и непрерывной зависимости оператора $B(x)$ от точки x следует

Лемма 4. *Все точки множества M^T являются точками локального минимума функции $j(x)$. Точки локального постоянства функции образуют открытое плотное в M^T подмножество, на котором разложение (5) непрерывно зависит от точки x.*

Из леммы 3 непосредственно следует

Лемма 5. *Функция $j(x)$ не возрастает вдоль траектории точки x, т. е. $j(T^t x) \leqslant j(x)$ при $t > 0$. Кроме того, если $j(T^t x) = j(x)$, то*

$$J_0(\cdot T^t x) = U_i U_{i-1} \ldots U_1 J_0(x) \quad \text{и} \quad J_+(T^t x) = U_i U_{i-1} \ldots U_1 J_+(x)$$

(здесь i — число отражений траектории точки x от границы ∂Q за время

t), *т. е. разложение* (5) *инвариантно относительно сдвигов вдоль траектории точки* x *на интервале времени* $(0, t)$.

Рассмотрим движение носителя выпуклого слоя в конфигурационном пространстве Q. Пусть Σ — выпуклый слой и $\Sigma_t = T^t\Sigma$ при $t > 0$. Обозначим $\tilde{S}_t$ отображение поверхности $\tilde{\Sigma}$ на поверхность $\tilde{\Sigma}_t$, определяемое формулой $\tilde{S}_t q = q_t$. Рассмотрим касательное отображение $d\tilde{S}_t(q)$ в точке $q \in \tilde{\Sigma}$ такой, что $q_t \notin \partial Q$. Если точка $(q, v(q))$ не испытала отражений от границы ∂Q на интервале времени $(0, t)$, то

$$d\tilde{S}_t(q) = \tilde{S}_t(q + dq) - \tilde{S}_t(q) = (I + tB(q))\,dq,$$

где $B(q)$ — оператор второй квадратичной формы слоя Σ в точке q. В общем случае (см. [8]) имеет место

Лемма 6. *Пусть точка* $(q, v(q)) \in \Sigma$ *испытала отражения от границы бильярда в моменты* $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_l < t$. *Тогда*

$$d\tilde{S}_t(q) = \tilde{S}_t(q + dq) - \tilde{S}_t(q) = (I + (t - t_l)B_l)\,U_l\,(I + \tau_l B_{l-1})U_{l-1}\ldots$$
$$\ldots U_1(I + \tau_1 B(q))\,dq, \qquad (6)$$

где $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ $(t_0 = 0)$, $B_i = B(q_{t_i+0})$ *и* U_i *— введенные ранее проекторы для траекторий точки* $(q, v(q))$.

Заметим, что в соотношении (6) операторы $B_1, B_2, \ldots, B_l$ определяются оператором $B(q)$ в силу формулы (3).

§ 4. Свойства касательных отображений

Рассмотрим произвольную точку $x_0 = (q_0, v_0) \in M$. В предыдущем параграфе были] определены слои $\Sigma_0^{(t)}$, Σ_t^* и $-\Sigma_t^*$. Слой $-\Sigma_t^*$ содержит точку x_0, и траектории его точек на интервале времени $(0, t)$ сближаются с траекторией точки x_0. Это позволит построить многообразие W (см. теорему 1), как предел слоев $-\Sigma_t^*$ при $t \to \infty$.

В данном параграфе изучаются касательные отображения к сдвигам носителя слоя $\Sigma_0^{(t)}$ под действием T^s, $0 < s \leqslant t$. Свойства этих отображений позволят вывести существование ЛТС из результатов Катка и Стрельцина [7] (см. § 5) и провести непосредственное геометрическое построение ЛТС (см. § 6).

Будем считать, что в условии Т.1 $\hat{x}(x_0) = x_0$ и докажем теорему 1 в этом случае. Общий случай сводится к случаю $\hat{x}(x_0) = x_0$ с помощью переноса слоя $W(\hat{x}(x_0))$ под действием $\{T^t\}$.

Поскольку $\hat{x}(x_0) = x_0$, то $x_0 \in M^C$, т. е. траектория $T^t x_0$ удовлетворяет условиям Т.1 и Т.2 и размерность пространств $J_0(x)$ и $J_+(x)$ постоянна в некоторой окрестности точки x_0.

Рассмотрим траекторию $T^t x_0$ точки x_0 при $t > 0$. Обозначим $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ моменты отражений траектории $T^t x_0$ от границы ∂Q. Назовем серию отражений с номерами $\{1, 2, \ldots, j\}$ достаточной, если для любого $w \in J(x_0)$ из соотношений (см. лемму 3) $K_i V_i U_{i-1} U_{i-2} \ldots U_2 U_1 w = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, j$ вытекают эти соотношения при всех $i \geqslant 1$. В силу конечномерности пространства $J(x_0)$ существуют конечные достаточные серии отражений, и мы можем рассмотреть минимальную из них — $\{1, 2, \ldots, p\}$.

В некоторой окрестности $U_{x_0} \subset M$ точки x_0 функция $j(x)$ будет постоянной, а серия $\{1, 2, \ldots, p\}$ достаточной для всех $x \in U_{x_0} \cap M^T$.

Разложение (5) можно определить всюду в окрестности U_{x_0}, положив для всякой точки $x \in U_{x_0}$

$$J_0(x) = \{w \in J(x):\ K_i V_i U_{i-1} U_{i-2} \ldots U_1 w = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant p\}$$

и

$$J_+(x) = J(x) \ominus J_0(x), \tag{7}$$

где операторы K_l, V_l, U_l соответствуют траектории точки x. Введенное таким образом разложение пространства $J(x)$ совпадает с уже построенным в области определения оператора $B(x)$. Это разложение непрерывно зависит от точки x всюду в U_{x_0}, в силу чего оно будет инвариантным относительно сдвигов вдоль траекторий точек $x \in U_{x_0}$.

Из условия Т.1 следует, что траектория $T^t x_0$ возвращается в окрестность U_{x_0} с положительной частотой $\rho = \rho(U_{x_0})$. Выберем окрестность U_{x_0} столь малой, чтобы число отражений траектории $T^t x_0$ между двумя последовательными возвращениями в U_{x_0} было больше p. Пусть траектория $T^t x_0$ испытала $p + q_1$ отражений до первого возвращения и $p + q_i$ отражений между $(i-1)$-м и i-м возвращениями в U_{x_0} при $i \geqslant 2$. Через $N_m = mp + q_1 + \ldots + q_m$ обозначим общее число отражений до m-го возвращения. В силу условия Т.1 при всех достаточно больших m

$$m > \rho(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_{N_m}). \tag{8}$$

Фиксируем некоторое достаточно большое T и рассмотрим движение слоя $\Sigma_0^{(T)}$ под действием $\{T^t\}$ на интервале времени $(0, T)$. В дальнейшем мы будем рассматривать только часть слоя $\Sigma_0^{(T)}$, носитель которой при движении под действием $\{T^t\}$ на интервале времени $(0, T)$ находился внутри системы коридоров Θ_0 (см. § 2). При этом точки слоя $\Sigma_0^{(T)}$ отражаются от одних и тех же регулярных компонент границы ∂Q. Обозначим общее число отражений через N и число возвращений в окрестность U_{x_0} через m. Для удобства будем считать момент T выбранным таким образом, что $-\Sigma_0^{(T)} \subset \subset U_{x_0}$. Следовательно, траектории точек слоя $\Sigma_0^{(T)}$ при движении за время T m раз прошли достаточную серию отражений (при этом они проходили эту серию отражений в обратном порядке).

Пусть $0 = t_0^* < t_1^* < \ldots < t_m^* = T$ — моменты времени, в которые слой $-T^t \Sigma_0^{(T)}$ находился в окрестности U_{x_0}. Обозначим слой $T^{t_i^*} \Sigma_0^{(T)}$ через $\Sigma^*(i)$ и отображение поверхности $\tilde{\Sigma}^*(i)$ на поверхность $\tilde{\Sigma}^*(i+1)$, порожденное сдвигом $T^{t_{i+1}^* - t_i^*}$, через $\tilde{S}_i$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$. Таким образом,

$$\tilde{\Sigma}_T^* = \tilde{\Sigma}^*(m) = \tilde{S}_{m-1} \tilde{S}_{m-2} \ldots \tilde{S}_0 \tilde{\Sigma}_0^{(T)}.$$

Для оценки деформации поверхности $\tilde{\Sigma}_0^{(T)}$ при отображении $\tilde{S}_T = \tilde{S}_{m-1} \tilde{S}_{m-2} \ldots \tilde{S}_0$ достаточно получить соответствующие оценки для касательного отображения $d\tilde{S}_i$ при $0 \leqslant i \leqslant m-1$. Необходимые свойства отображений $d\tilde{S}_i$ устанавливаются в леммах 7 и 8. В дальнейшем через $J_0(-y)$ и $J_+(-y)$ обозначены подпространства J_0 и J_+ пространства $J(y)$, построенные для точки $-y = (q, -v)$, где $(q, v) = y$.

Пусть $y_0 = (q_0, v_0)$ — произвольная точка слоя $\Sigma_0^{(T)}$ и $y_i = (q_i, v_i) = T^{t_i^*} y_0$ — ее образ на слое $\Sigma^*(i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Рассмотрим касательное пространство $J(y_i)$ к поверхности $\tilde{\Sigma}^*(i)$ в точке q_i и его разложение

$$J(y_i) = J_0(-y_i) \oplus J_+(-y_i) \tag{9}$$

при $0 \leqslant i \leqslant m$. Разложение (9) инвариантно относительно сдвигов вдоль траектории точки y_0. Отсюда и из представления (6) для отображения $d\tilde{S}$ следует

Лемма 7. *Для всех* $y_0 \in \Sigma_0^{(T)}$

$$d\tilde{S}_i(q_i) J_0(-y_i) = J_0(-y_{i+1}) \quad \text{и} \quad d\tilde{S}_i(q_i) J_+(-y_i) = J_+(-y_{i+1})$$

при $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Следствие. *Для всех* $y_0 \in \Sigma_0^{(T)}$

$$d\tilde{S}_T(q_0) J_0(-y_0) = J_0(-y_m) \quad \text{и} \quad d\tilde{S}_T(q_0) J_+(-y_0) = J_+(-y_m).$$

Лемма 8. *Пусть* y_0 — *произвольная точка слоя* $\Sigma_0^{(T)}$. *При всех* $i = 0, 1, \ldots, m-1$ *оператор* $d\tilde{S}_i(q_i)$ *изометричен на пространстве* $J_0(-y_i)$ *и растягивает пространство* $J_+(-y_i)$, *т. е. для всех* $w \in J_+(-y_i)$ $\| d\tilde{S}_i(q_i) w \| \geqslant D \| w \|$, *где константа* $D > 1$ *определяется только выбором окрестности* U_{x_0}.

Доказательство. Из построения слоев $\Sigma^*(i)$ и формулы (3) следует, что оператор второй квадратичной формы слоя $\Sigma^*(i)$ в точке y_i обращает пространство $J_0(-y_i)$ в нуль. Вместе с формулой (6) это доказывает изометричность оператора $d\tilde{S}_i$ на $J_0(-y_i)$.

Для доказательства второго утверждения леммы 8 рассмотрим произвольную точку $\hat{y} = (\hat{q}, \hat{v}) \in M'$ такую, что $-\hat{y} \in U_{x_0}$ и $-T^{\hat{t}}\hat{y} \in U_{x_0}$ при некотором $\hat{t} > 0$. Обозначим через $0 < \hat{t}_1 < \hat{t}_2 < \ldots < \hat{t}_m < \hat{t}$ моменты отражения от границы траектории точки $\hat{y}$ на интервале времени $(0, \hat{t})$. Отражения в моменты $\hat{t}' = \hat{t}_{m-p+1}, \hat{t}_{m-p+2}, \ldots, \hat{t}_m$ образуют достаточную серию (в обратном порядке).

Пусть точка $\hat{y}$ лежит в некотором выпуклом слое Σ'. Рассмотрим слой $\Sigma'' = T^{\hat{t}}\Sigma'$ и обозначим $\tilde{S}'$ отображение $\tilde{\Sigma}'$ на $\tilde{\Sigma}''$, порожденное сдвигом $T^{\hat{t}}$. Рассмотрим разложения

$$J(\hat{y}) = J_+(-\hat{y}) \oplus J_0(-\hat{y}) \tag{10'}$$

и

$$J(T^{\hat{t}}\hat{y}) = J_+(-T^{\hat{t}}\hat{y}) \oplus J_0(-T^{\hat{t}}\hat{y}), \tag{10''}$$

которые определены формулой (7). Образ разложения (10′) при сдвиге вдоль траектории точки $\hat{y}$ на время $\hat{t}$ совпадает с разложением (10″). Поэтому оператор $d\tilde{S}'(\hat{q})$ сохраняет структуру разложений (10′) и (10″). Рассмотрим точку $T^{\hat{t}'-0}\hat{y} = \hat{y}' = (\hat{q}', \hat{v}')$ и обозначим

$$J(\hat{y}') = J_+(-\hat{y}') \oplus J_0(-\hat{y}') \tag{10'''}$$

образ разложения (10′) при сдвиге вдоль траектории точки $\hat{y}$ на время $\hat{t}' - 0$. Рассмотрим слой $\Sigma''' = T^{\hat{t}-0}\Sigma'$ и обозначим через $\tilde{S}_1'$ отображение $\tilde{\Sigma}'$ на $\tilde{\Sigma}'''$, порожденное сдвигом $T^{\hat{t}'-0}$, и через $\tilde{S}_2'$ отображение $\tilde{\Sigma}'''$ на $\tilde{\Sigma}''$, порожденное сдвигом $T^{\hat{t}-\hat{t}'}$. Тогда $\tilde{S}' = \tilde{S}_2'\tilde{S}_1'$, причем отображения $d\tilde{S}_1'(\hat{q})$ и $d\tilde{S}_2'(\hat{q}')$ сохраняют структуру разложений (10′)—(10‴).

В силу выпуклости слоя Σ' оператор $d\tilde{S}_1'(q)$ несжимающий, поэтому достаточно доказать неравенство $\| d\tilde{S}_2'(\hat{q}')w \| \geqslant D > 1$ для всех единичных векторов $w \in J_+(-\hat{y}')$, где константа D не зависит от точки $\hat{y}$ и от слоя Σ'. Согласно (6), для каждого вектора $w \in J_+(-\hat{y}')$ найдется по крайней мере одно значение $j = 1, 2, \ldots, p$, при котором $K_j V_j U_{j-1} U_{j-2} \ldots U_1 w \neq 0$, где операторы K_i, V_i, U_i соответствуют $(m - p + i)$-му отражению траектории точки $\hat{y}$. Вместе с формулой (6) это показывает, что $d\tilde{S}_2'(\hat{q}')w \neq w$, откуда $\| d\tilde{S}_2'(\hat{q}')w \| > \| w \|$.

В силу формулы (6) оператор $d\widetilde{S}_2'(\hat{q}')$ непрерывно зависит от оператора второй квадратичной формы $\hat{B}(\hat{q}')$ слоя Σ''' в точке $\hat{y}'$. Этот оператор неотрицательно определен, самосопряжен и, в силу следствия леммы 1,

$$\|\hat{B}(\hat{q}')\| \leqslant \frac{1}{\hat{t}_{m-p+1} - \hat{t}_{m-p}}.$$

Множество операторов Λ, удовлетворяющих этим условиям, компактно, поэтому

$$D(\hat{y}) = \inf_{\hat{B}(\hat{q}')\in\Lambda} \inf_{\substack{\|w\|=1 \\ w\in J_+(\hat{y}')}} \|d\widetilde{S}_2'(\hat{q})w\| > 1.$$

Поскольку функция $D(\hat{y})$ непрерывна на U_{x_0}, то при подходящем выборе окрестности U_{x_0}

$$\inf_{\hat{y}\in U_{x_0}} D(\hat{y}) = D > 1.$$

Лемма 8 доказана.

Следствие. *Пусть y_0 — произвольная точка слоя $\Sigma_0^{(T)}$. Ограничение оператора $dS_T(q_0)$ на подпространство $J_0(-y_0)$ изометрично. Ограничение этого оператора на подпространство $J_+(-y_0)$ растягивает любой вектор не менее чем в $D^m > D^{\rho T+1}$ раз.*

Последнее неравенство следует из соотношения (8).

Заметим, что условие $\Sigma_0^{(T)} \subset U_{x_0}$ несущественно, т. е. леммы 7 и 8 остаются верными при всех достаточно больших T.

§ 5. Неравномерная частичная гиперболичность бильярдных систем

В данном параграфе изучаются характеристические показатели Ляпунова бильярдной системы. Доказанная в § 4 лемма 8 позволит установить наличие отрицательных показателей на множестве

$$\Lambda = \hat{M} \cap \{x \in M^T:\ j(\hat{x}(x)) > 0\}.$$

Будем предполагать, что граница бильярда ∂Q удовлетворяет условиям:

(А.1) найдется регулярная точка $q \in \partial Q$, в которой $K(q) \neq 0$;

(А.2) норма оператора $K(q)$ равномерно ограничена:

$$\sup_{q\in\partial Q} \|K(q)\| < \infty.$$

Нетрудно показать, что в бильярдах с условием (А.1) $\mu(\Lambda) > 0$, однако вопрос о полноте меры множества Λ открыт. Этот вопрос есть по существу вопрос о полноте меры множества M^C (см. § 1).

Следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы Песина (см. [3]) и следующей леммы.

Лемма 9. *На множестве Λ существуют отрицательные показатели Ляпунова.*

Доказательство. Пусть $x_0 = (q_0, v_0)$ — произвольная точка множества Λ. Как и при доказательстве теоремы 1, достаточно исследовать случай $x_0 \in M^C$, поэтому к траектории точки x_0 применима лемма 8. Обозначим $j(x_0) = j_0 > 0$.

Рассмотрим касательное пространство $\mathcal{T}_xM$ к многообразию M в произвольной точке $x = (q, v)$. Ясно, что $\mathcal{T}_xM = \mathcal{T}_qQ \oplus \mathcal{T}_vS$, где $\mathcal{T}_qQ$ — касательное пространство к Q в точке q и $\mathcal{T}_vS$ — касательное пространство к $(d-1)$-мерной сфере S векторов скорости в точке $v \in S$.

Поэтому вектор $u \in \mathcal{T}_x M$ есть пара $u = (dq, dv)$, где $dq \in \mathcal{T}_q Q$ и $dv \in \in \mathcal{T}_v S$ и $\| u \|^2 = \| dq \|^2 + \| dv \|^2$.

Рассмотрим слой $\Sigma_0^{(T)} \subset M$ и точку $y_T = -x_T = (q_T, -v_T) = -T^T x_0 \in \in \Sigma_0^{(T)}$. Касательное пространство $\mathcal{T}_{y_T} \Sigma_0^{(T)} \subset \mathcal{T}_{y_T} M$ состоит из пар вида $(dq, 0)$, где $dq \in \mathcal{T}_{q_T} \tilde{\Sigma}_0^{(T)} \subset \mathcal{T}_{q_T} Q$. В пространстве $\mathcal{T}_{y_T} \Sigma_0^{(T)}$ можно выделить j_0-мерное подпространство $\mathcal{T}_{y_T}^{(+)} \Sigma_0^{(T)}$, состоящее из пар $(dq, 0)$, где $dq \in J_+ (x_T)$.

Пусть $u = (dq, 0)$ — произвольный вектор пространства $\mathcal{T}_{y_T}^{(+)} \Sigma_0^{(T)}$. Рассмотрим его образ $dT^t u = (dq_t, dv_t) \in \mathcal{T}_{T^t y_T} M$ под действием касательного отображения к сдвигу T^t.

Поскольку $dT^t u \in \mathcal{T}_{T^t y_T} \Sigma_t^{(T)}$, то $dv_t = B_t dq_t$, где B_t — оператор второй квадратичной формы слоя $\Sigma_t^{(T)}$ в точке $T^t y_T$. В силу леммы 8 $\| dq_t \| \geqslant D^{m_t} \| dq \|$, где m_t — число попаданий траектории точки y_T в окрестность U_{x_0} за время t. Отсюда следует, что

$$\| dT^t u \| = \sqrt{\| dq_t \|^2 + \| B_t dq_t \|^2} \geqslant \| dq_t \| \geqslant D^{m_t} \| dq \|. \tag{11}$$

С другой стороны, $\| dT^t u \| \leqslant \| dq_t \| + \| B_t dq_t \|$.

Из условий Т.2 и (А.2) нетрудно вывести, что $\| B_t \| \leqslant \text{const}\, (T - t)$, откуда

$$\| dT^t u \| \leqslant c_1 (T - t) \| dq_t \|. \tag{12}$$

Выберем вектор $dq \in J_+(y_T)$ так, чтобы вектор $u_0 = dT^T u$ имел единичную длину. Тогда из оценки (11) $\| dq \| = \| du \| \leqslant D^{-m_T} \leqslant c_2 D^{-\rho T}$. Последнее неравенство следует из (8). Из оценок (11) и (12) следует, что при всех $t < T$

$$\| dT^t u_0 \| \leqslant c_3 t D^{-\rho T}. \tag{13}$$

Заметим, что в (13) величины c_3, D и ρ не зависят от выбора вектора $dq \in \in J_+ (-y_T)$. Для произвольного $\rho_1 < \rho$ из (13) следует оценка

$$\| dT^t u_0 \| \leqslant c_4 D^{-\rho_1 t}. \tag{14}$$

В соотношении (14) выбор u_0 зависит от t, но в силу компактности единичной сферы в пространстве $\mathcal{T}_{x_0} M$ найдется вектор $u_0 \in \mathcal{T}_{x_0} M$, для которого (14) будет выполнено при всех $t > 0$. Отсюда

$$\chi^+ (x_0, u_0) = \overline{\lim} \frac{1}{t} \ln \| dT^t u_0 \| \leqslant -\rho \ln D < 0,$$

где χ^+ — характеристический показатель Ляпунова (см. [3] и [4]). Лемма 9 доказана.

Аналогичные рассуждения показывают, что пространство векторов, удовлетворяющих (14), j_0-мерно и его проекция на $\mathcal{T}_{q_0} Q$ совпадает с $J_+ (x_0)$. Поскольку $dv_T = B_T dq_T$ при всех T для компонент вектора $dT^T u$, то для компонент вектора $u_0 = (dq_0, dv_0)$ выполнено соотношение $dv_0 = = B dq_0$.

Автор выражает благодарность Я. Г. Синаю за постановку задачи и полезные обсуждения, Я. Б. Песину и А. Крамли за ряд ценных замечаний, а также Н. В. Щербине за полезные обсуждения.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Синай Я. Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов.— УМН, 1970, т. 25, вып. 2, с. 141—191.
2. *Бунимович Л. А., Синай Я. Г.* Об одной теореме теории рассеивающих бильярдов.— Матем. сб., 1973, т. 90, с. 415—431.
3. *Песин Я. Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория.— УМН, 1977, т. 32, вып 4, с. 55—112.
4. *Песин Я. Б.* Семейства инвариантных многообразий, отвечающих ненулевым характеристическим показателям.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1976, т. 40, с. 1332—1379.
5. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.
6. *Sinai Ja. G.* Entropy per particle for the dynamical system of Hard spheres.— Preprint, Harvard University, 1978.
7. *Katok A., Strelcyn J. M.*— Invariant manifolds for smooth maps with singularities.— Preprint. University of Maryland, 1980.
8. *Sinai Ja. G.* Development of Krylov's ideas.— Afterword to Krylov N. S. Works on the foundations of statistical physics.— Princeton University Press, 1979, p. 239—281.
9. *Federer H.* Curvature measures.— Trans. Amer. Math. Soc., 1959, v. 93, p. 418—491.
10. *Синай Я. Г.* Эргодические свойства газа Лоренца.— Функц. анализ, 1979, т. 13, вып. 3, с. 46—59.
11. *Bunimovich L. A., Sinai Ja. C.* Markov partitions for dispersed billiards.— Comm. Math. Phys., 1980, v. 78, p. 247—280.
12. *Bunimovich L. A., Sinai Ja. C.* Statistical properties of Lorentz gas with periodic configurations of scatterers.— Comm. Math. Phys., 1981, v. 78, p. 479—497.
13. *Аносов Д. В., Синай Я. Г.* Некоторые гладкие эргодические системы.— УМН, 1967, т. 22, вып. 5, с. 107—172.
14. *Синай Я. Г.* Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром II.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1966, т. 30, вып. 1. с. 15—68.

Примечание при корректуре. Полученные результаты применимы также к динамическим системам, порожденным движением нескольких твердых кругов внутри плоского многоугольника.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 9 июня 1981 г.