

УДК 517.53/.57

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ БИЛЛИАРДОВ

Л. А. Бунимович, Я. Г. Синай, Н. И. Чернов

### СОДЕРЖАНИЕ

§ 1.	Введение . . . . .	43
§ 2.	Биллиарды: необходимые сведения . . . . .	48
§ 3.	Марковское решето: локальные конструкции . . . . .	54
§ 4.	Марковское решето: глобальные конструкции . . . . .	62
§ 5.	Оценка убывания корреляций . . . . .	70
§ 6.	Центральная предельная теорема . . . . .	71
§ 7.	Приложения. Диффузия в детерминированных системах . . . . .	75
	Приложение 1 . . . . .	78
	Приложение 2 . . . . .	87
	Приложение 3 . . . . .	88
	Список литературы . . . . .	91

### § 1. Введение

Данная работа является продолжением статьи [8] тех же авторов, но может быть прочитана независимо от нее.

Мы изучаем статистические свойства динамических систем, порожденных свободным движением с упругими отражениями от границы. Такие системы называются *биллиардами*.

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $Q$  — ограниченная область с кусочно гладкой границей на евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  или на стандартном торе  $\text{Tor}^2$ . *Биллиардом* называется динамическая система, порожденная движением точечной частицы с постоянной единичной скоростью внутри  $Q$  и упругими отражениями от границы  $\partial Q$ .

Под упругим отражением, как обычно, понимается такое, при котором «угол падения равен углу отражения».

Ниже рассматриваются *гиперболические биллиарды* (см. [34]), т. е. биллиарды, заданные внутри области  $Q$  с границей определенного вида, обеспечивающей гиперболический характер движения (под этим понимается отличие от нуля характеристических показателей Ляпунова почти всюду в фазовом пространстве).

Точнее, мы рассматриваем те классы двумерных биллиардов, для которых в [8] построены марковские разбиения. Это биллиарды в областях, у которых граница состоит из конечного числа  $C^3$ -гладких компонент трех видов:

- а) строго вогнутые внутрь области  $Q$ ;
- б) прямолинейные отрезки;
- в) выпуклые наружу неполные дуги окружностей, дополнения к которым до полных кругов не пересекают других компонент  $\partial Q$ .

Компоненты типа а) называются *рассеивающими*, типа б) — *нейтральными*, типа в) — *фокусирующими* (названия даны по их воздействию на падающий пучок параллельных траекторий — рис. 1). Биллиарды с границей, состоящей из компонент только типа а) называются *рассеивающими*, типов а) и б) — *полурассеивающими*. Среди конкретных примеров наиболее известны *периодический газ Лоренца* (рассеивающий биллиард на торе с вырезанным кругом — рис. 2а) и *стадион* (биллиард в области, ограниченной двумя параллельными отрезками и двумя дугами окружностей — рис. 2б).

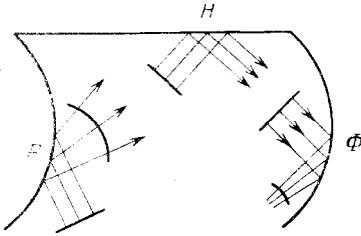
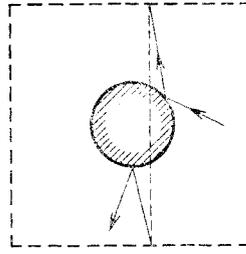
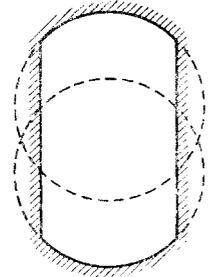


Рис. 1



а



б

Рис. 2

Биллиардная система является гамильтоновой и поэтому сохраняет меру Лиувилля [10].

От системы с непрерывным временем можно стандартным образом перейти к производному отображению  $T$ , соответствующему преобразованию от текущего отражения к последующему (при наличии фокусирующих или нейтральных компонент границы  $\partial Q$  оно строится чуть иначе — см. § 2). Отображение  $T$  действует на многообразии всех состояний системы «после отражения». Это многообразие представляет собой двумерную поверхность  $M$ , точно определяемую в § 2. Она и будет фазовым пространством отображения  $T$ . Проекция  $\nu$  меры Лиувилля на  $M$  будет инвариантной мерой отображения  $T$  [10]. При наличии инвариантной меры любая измеримая функция  $F(x)$  на  $M$  порождает вероятностный стационарный случайный процесс с дискретным временем  $X_n = F(T^n x)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Статистические свойства этого процесса (скорость убывания корреляций, центральная предельная теорема и др.) играют важную роль в физических приложениях теории биллиардов. В этом направлении мы доказываем следующие утверждения (здесь  $\langle \cdot \rangle$  — усреднение по мере  $\nu$ ):

**Теорема 1.1** (скорость убывания корреляций). Пусть задан двумерный гиперболический биллиард, граница которого удовлетворяет некоторым дополнительным условиям А, Б, В «общего положения» (см. § 2), а функция  $F(x)$  на  $M$  удовлетворяет условию Гёльдера в естественных координатах  $r, \varphi$  (см. также § 2) с ограниченным снизу показателем <sup>1)</sup> и  $\langle F \rangle = 0$ . Тогда корреляции стационарного процесса  $\{X_n\}$  убывают субэкспоненциально:

$$(1.1) \quad |\langle X_0 \cdot X_n \rangle| \leq C(F) e^{-aV\sqrt{n}},$$

где  $C(F) > 0$ , и  $a = a(Q) > 0$  — постоянная.

<sup>1)</sup> Это означает, что  $|F(x) - F(y)| \leq C(F) |x - y|^\alpha$  при  $\alpha \geq \alpha_0$  для некоторого  $\alpha_0(Q) > 0$ .

Если же в условии Гёльдера показатель  $\alpha$  функции  $F$  не ограничивать снизу, то теорема 1.1 также будет выполнена, но с показателем  $a$  в (1.1), зависящим от  $\alpha$ , и, тем самым, от  $F$ .

Обозначим  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

**Теорема 1.2** (центральная предельная теорема). В условиях теоремы 1.1 величина

$$(1.2) \quad \sigma^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle X_0 \cdot X_n \rangle$$

конечна. Если  $\sigma \neq 0$ , то

$$(1.3) \quad \nu \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} S_n < z \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du.$$

**З а м е ч а н и е 1.3.** Теорему 1.1 было бы правильнее назвать теоремой об убывании автокорреляций. Под собственно корреляциями чаще понимают величину  $\langle F(x) \cdot G(T^n x) \rangle$ , где  $F$  и  $G$  — две различные функции на  $M$ , удовлетворяющие тем же условиям, что и  $F$  в теореме 1.1. При этом мы докажем оценку

$$(1.4) \quad |\langle F(x) \cdot G(T^n x) \rangle| \leq C(F, G) e^{-a\sqrt{n}}.$$

**З а м е ч а н и е 1.4** [9]. Величина  $\sigma^2$  из (1.2) обращается в нуль тогда и только тогда, когда функция  $F(x)$  гомологична нулю, т. е.  $F(x) = G(Tx) - G(x)$ , где функция  $G$  на  $M$  квадратично интегрируема по мере  $\nu$ .

Мы выведем также два конкретных следствия из теоремы 1.2, которые имеют ясную физическую интерпретацию. Оба следствия относятся к более узкому классу систем — *рассеивающим бильярдам с конечным горизонтом* (т. е. когда длина свободного пробега между отражениями равномерно ограничена сверху; это условие может нарушаться только в бильярдах на торе).

Пусть  $N_t(x)$  означает число отражений, испытанных траекторией точки  $x \in M$  за время от 0 до  $t$  (это непрерывное время фазового потока).

**Теорема 1.5.** Найдутся такие  $a_1 = a_1(Q) > 0$  и  $b_1 = b_1(Q) > 0$ , что

$$(1.5) \quad \nu \left\{ \frac{N_t(x) - a_1 t}{\sqrt{b_1 t}} \leq z \right\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du.$$

Второе следствие относится к явлению диффузии в периодическом газе Лоренца. Пусть  $Q$  — область на стандартном торе с координатами  $0 \leq q_1 < 1$  и  $0 \leq q_2 < 1$ . Обозначим  $Q_\infty$  соответствующую область на универсальной накрывающей тора:  $Q_\infty = \{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2: (q_1 - n, q_2 - m) \in Q \text{ для некоторых целых } m, n\}$ . Тогда поднятие любой бильiardной траектории на универсальную накрывающую будет бильiardной траекторией в области  $Q_\infty$ . Если начальный ансамбль траекторий (при  $t = 0$ ) сосредоточен в исходной области  $Q = Q_\infty \cap \{0 \leq q_1, q_2 < 1\}$  и распределен в соответствии с мерой Лиувилля, то при  $t \rightarrow \infty$  он будет «расползаться» (диффундировать) в  $Q_\infty$ . Обозначим  $q_1^{(t)}(x)$  и  $q_2^{(t)}(x)$  координаты (в  $Q_\infty$ ) блуждающей точки в момент времени  $t$ , если ее начальное положение (при  $t = 0$ ) было в  $x \in M$ .

**Теорема 1.6.** Существует двумерное гауссовское распределение с плотностью  $g(q_1, q_2)$  (зависящее от области  $Q$ ) такое, что

$$(1.6) \quad \nu \left\{ \left( \frac{q_1^{(t)}(x)}{\sqrt{t}}, \frac{q_2^{(t)}(x)}{\sqrt{t}} \right) \in A \right\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_A g(q_1, q_2) dq_1 dq_2$$

для каждого ограниченного открытого множества  $A \subset \mathbb{R}^2$ , граница которого имеет меру 0. Данное гауссовское распределение имеет нулевое среднее и невырожденную ковариационную матрицу.

Поясним кратко идеи доказательства теорем 1.1 и 1.2. Статистические свойства гиперболических динамических систем впервые были исследованы для случаев геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны [1], а затем — для аксиоматически определенных  $\mathcal{U}$ -систем Аносова [12] и более общих  $A$ -систем Смейла [35, 19, 20]. Общепринятый план исследования состоит в построении марковского разбиения, с последующим сведением системы к ее символическому представлению в виде топологической марковской цепи (ТМЦ) с конечным алфавитом. Для ТМЦ, обладающих дополнительным свойством топологического перемешивания, можно определить широкий класс инвариантных гиббсовских мер, представляющих собой равновесные состояния, отвечающие «хорошим» (обычно — гёльдеровским) функциям на фазовом пространстве. Статистические свойства гиббсовских мер достаточно полно изучены в работах Р. Боуэна, Д. Рюэлля и Я. Г. Синая — см. обзоры [4, 33, 14]. Соответствующая теория, получившая название «термодинамический формализм», имеет глубокие связи с одномерной статистической механикой решетчатых систем. В частности, в цитированных работах доказан экспоненциальный характер убывания корреляций и центральная предельная теорема. Отметим также недавнюю работу [28], в которой эти результаты получены заново с помощью чисто вероятностной техники (посредством сведения к общим марковским цепям), а кроме того, там доказана локальная предельная теорема и теорема восстановления.

Рассматриваемые в настоящей статье билиардные системы гиперболически, причем в достаточно сильной степени: их гиперболичность близка к равномерной и в силу двумерности фазового пространства она является полной (подробности см. в § 2). Но билиардные системы обладают двумя существенными отличиями от  $\mathcal{U}$ - и  $A$ -диффеоморфизмов.

Во-первых, билиардное отображение  $T$  разрывно. Его разрывы порождаются касательными (скользящими) отражениями и попаданиями траекторий в точки излома границы  $\partial Q$ . Поэтому элементы марковского разбиения имеют весьма сложный вид — они нигде не плотны и представляют собой вполне несвязные множества канторовского типа. Но более важно, что их число счетно, поэтому получается символическая система с бесконечным алфавитом (подробное объяснение см. в [8]).

Второе отличие состоит в том, что в билиардах имеется естественная инвариантная мера  $\nu$ , порожденная мерой Ляпунова. Именно она интересна с точки зрения приложений. Эта мера индуцирует в символической системе некоторую инвариантную меру  $\nu'$ , которая отнюдь не обязана быть гиббсовской. Попутно отметим, что построение гиббсовских мер для ТМЦ со счетным алфавитом — задача, не решенная полностью до сих пор.

Два указанных обстоятельства вынуждают разрабатывать новые подходы для исследования статистических свойств билиардных систем. Первое такое исследование было проведено в [22, 23]. В этих работах мера  $\nu'$  в ТМЦ аппроксимировалась некоторой мерой  $\nu''$  с конечной памятью — т. е. «почти» марковской. Полученную вероятностную цепь легко свести к марковской (но со счетным числом состояний). При этом для доказательства статистических свойств последней достаточно «просто» перемешивания, так как оно может происходить слишком медленно, — здесь необходимы дополнительные условия регулярности. Одно из таких условий — аналог условия Дёблина — было доказано в [22] (см. поправку в [24]), в результате чего в [23]

была получена субэкспоненциальная оценка убывания корреляций

$$(1.7) \quad |\langle X_0 \cdot X_n \rangle| \leq C(F) e^{-n^\gamma}$$

(здесь  $\gamma \in (0, 1)$  не зависит от  $F$ ), доказана центральная предельная теорема и ряд других статистических свойств периодического газа Лоренца при условии конечного горизонта (ограниченной сверху длины свободного пробега). На основе этих результатов в [30] выведена «квазилокальная» предельная теорема, занимающая промежуточное положение между центральной и локальной.

В настоящей работе этот подход существенно упрощен и получены более сильные результаты. Во-первых, мы отказались от построения символической системы со счетным алфавитом, которая позволяет закодировать почти все точки фазового пространства  $M$ . Действительно, при аппроксимации меры  $\nu'$  мерой  $\nu''$  в ТМЦ происходит потеря точности, которую можно было бы допустить с самого начала, строя символическую систему более «грубо», но с конечным алфавитом. Для этого мы вводим конечный набор подмножеств в  $M$ , обладающих марковскими свойствами в течение определенного, *конечного* промежутка времени (т. е. по отношению к действию  $T^i$  при  $0 \leq i \leq N$ , где  $N$  конечно). Построенный набор подмножеств *не покрывает* всего фазового пространства, поэтому мы назвали его *марковским решетом*. Он порождает символическую (не марковскую!) систему с конечным алфавитом, инвариантная мера в которой достаточно хорошо аппроксимируется некоторой марковской мерой  $\nu'''$  (снова на том же отрезке времени  $[0, N]$ ). Эта мера обладает хорошими статистическими свойствами не «вообще», а именно на конечном промежутке времени  $[0, N]$ . В этой связи нам приходится, как и в [9], доказывать дополнительные условия регулярности. Мы устанавливаем аналог условия сильного перемешивания в смысле Ибрагимова [9] (это сильнее, чем условие Дёблина) и отсюда выводим теоремы 1.1 и 1.2. Отметим, что наша оценка (1.1) лучше, чем (1.7), так как фактически позволяет оценить снизу значение  $\gamma$  и дает  $\gamma \geq 1/2$ . Кроме того, наши предположения А, Б, В о границе  $\partial Q$  существенно слабее сделанных в работе [23] (например, здесь мы рассматриваем газ Лоренца с бесконечным горизонтом, а также стадионы).

Вопрос о том, является ли субэкспоненциальная оценка вида (1.1) наилучшей для бильярдов, остается открытым. Численные расчеты [18, 26], однако, указывают на действительно *субэкспоненциальный* характер убывания корреляций.

Наконец отметим, что для нашего доказательства теорем 1.1 и 1.2 марковское разбиение оказывается излишним: наше решето строится с помощью *предмарковского* разбиения, введенного в [8, 22] на промежуточной стадии построения марковского. По существу, это и упрощает доказательство теорем 1.1 и 1.2 в сравнении с [22, 23].

С другой стороны, марковское разбиение в бильярдах остается необходимым при решении ряда других задач. Оно позволяет доказать некоторые асимптотические оценки для числа периодических траекторий (см. [8, 17]). Можно надеяться, что оно также позволит развить термодинамический формализм в духе Боуэна — Рюэля — Синая для гиперболических систем с особенностями (в частности, для гиперболических бильярдов).

Структура настоящей статьи такова. В § 2 кратко описываются общие свойства гиперболических бильярдов. В § 3 развита необходимая техника для построения марковского решета, основанная на понятии *однородного* устойчивого или неустойчивого многообразия, позволяющая преодолевать влияние особенностей бильярдного отображения  $T$ . В § 4 строится марковское решето, при этом его определение и основные свойства формулиру-

ются в п. 4.1. Последние три параграфа посвящены выводу теорем 1.1 (§ 5), 1.2 (§ 6) и 1.5—1.6 (§ 7). Приложения содержат доказательства некоторых технических теорем из § 3.

Понятие марковского решета было предложено Н. И. Черновым. Идея перехода к однородным многообразиям и связанными с ними дополнительными дроблениями (см. § 3) была высказана Я. Г. Синаем. Окончательная редакция была проведена всеми авторами.

## § 2. Биллиарды: необходимые сведения

В этом параграфе мы приведем необходимые определения и свойства гиперболических биллиардов. Более подробное изложение см. в [8].

**2.1. Рассеивающие биллиарды: фазовое пространство.** Как и в [8], мы сосредоточим основное внимание на рассеивающих биллиардах, а для остальных опишем лишь необходимые изменения и дополнения во всех конструкциях.

Биллиардная область  $Q$  всегда предполагается ограниченной связной замкнутой областью на плоскости или на стандартном двумерном торе. Граница  $\partial Q$  должна быть кусочно гладкой, состоящей из конечного числа гладких (класса не ниже  $C^3$ ) несамопересекающихся кривых  $\Gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ , которые либо замкнуты, либо имеют общие концевые точки. *Регулярную часть границы* обозначим

$$\partial\tilde{Q} = \partial Q \setminus \bigcup_{i \neq j} (\Gamma_i \cap \Gamma_j),$$

а точки  $q \in \partial Q / \partial\tilde{Q}$  назовем *точками ее излома*. В регулярных точках  $q \in \partial\tilde{Q}$  определены единичный вектор внутренней нормали  $n(q)$  и кривизна  $\kappa(q)$  по отношению к этому вектору. В рассеивающих биллиардах  $\kappa(q)$  всюду положительна.

Биллиардная система задает кусочно гладкий поток  $\{S^t\}$  на фазовом пространстве  $\mathfrak{M}$ , представимом в виде  $\mathfrak{M} = Q \times S^1 = \{x = (q, v) : q \in Q, \|v\| = 1\}$ . Поток  $\{S^t\}$  сохраняет меру Лиувилля  $d\mu = c_\mu dq dv$ , где  $dq$  и  $dv$  — меры Лебега на  $Q$  и  $S^1$  соответственно,  $c_\mu$  — нормирующий множитель.

Введем «граничное фазовое пространство»  $M = \{x = (q, v) : q \in \partial\tilde{Q}, (v, n(q)) > 0\}$ . Обозначим  $\bar{M}$  замыкание  $M$  в пространстве  $\mathfrak{M}$ . Граница  $\partial M = \bar{M} \setminus M$  состоит из двух частей:  $\partial M = S_0 \cup V_0$ , где  $S_0 = \{(q, v) : q \in \partial Q, (v, n(q)) = 0\}$  («касательные отражения») и  $V_0 = \{(q, v) : q \in \partial Q \setminus \partial\tilde{Q}\}$  («биллиардные углы»). Поток  $\{S^t\}$  порождает производное отображение  $\bar{M}$  в себя, обозначаемое  $T$ .

Введем в  $\bar{M}$  естественные координаты:  $r$  — параметр длины дуги на кривой  $\partial Q$  и  $\varphi$  — угол между векторами  $v$  и  $n(q)$  ( $|\varphi| \leq \pi/2$ ). В этих координатах  $\bar{M}$  будет объединением прямоугольников и цилиндров. Для точки  $x \in \bar{M}$  будем обозначать  $r(x)$  и  $\varphi(x)$  ее координаты. Отображение  $T$  сохраняет меру  $dv = c_v \cos \varphi dr d\varphi$ , ( $c_v$  — нормирующий множитель). Обозначим  $\tau_+(x) = \tau(x)$  и  $\tau_-(x)$  первый положительный и отрицательный моменты времени достижения границы  $\partial Q$  траекторией точки  $x$ , т. е.  $T^{\pm 1}x = S^{\tau_{\pm}(x)+0}x$ .

Отображения  $T$  и  $T^{-1}$  являются кусочно гладкими:  $T$  имеет разрывы на множестве  $T^{-1}R_0$ , а  $T^{-1}$  — на  $TR_0$ . Обозначим  $R_i = T^i R_0$  и  $R_{m,n} = \bigcup_m^n R_i$  при  $-\infty \leq m < n \leq \infty$ . Тогда множество особых точек для  $T^{\pm n}$ ,  $n \geq 1$ , совпадает с  $R_{-n,0}$  ( $R_{0,n}$ ). Множество  $R_{-\infty, \infty}$  состоит из счетного числа гладких ( $C^1$ ) кривых, называемых далее *кривыми разрыва*.

На рассеивающие билиарды мы накладываем следующие два условия «общего положения».

**Условие А.** Все внутренние углы области  $Q$  в точках излома ее границы отличны от нуля.

**Условие Б.** Для любого  $m \geq 1$  число кривых разрыва из  $R_{-m, m}$ , проходящих или оканчивающихся в какой-либо точке  $x \in \bar{M}$ , не может превышать  $K_0 m$ , где  $K_0$  — постоянная для области  $Q$ .

Оба условия существенно использовались при построении марковских разбиений в [8]. Отметим, что условие Б всегда выполнено, если  $Q$  — область на торе с гладкой границей [8]. В работах [22, 23] условие Б формулировалось иначе и более жестко: не допускалось более трех кривых разрыва из  $R_{-\infty, \infty}$ , проходящих через одну точку в  $\bar{M}$ . Численные расчеты [32] показывают, что при нарушении условия А скорость убывания корреляций становится медленной (степенной), т. е. теорема 1.1 не справедлива.

**З а м е ч а н и е 2.1.** Пусть билиардная область  $Q$  удовлетворяет условию А. Тогда найдутся постоянные  $m_0 = m_0(Q)$  и  $\tau_0 = \tau_0(Q) > 0$  такие, что для любой точки  $x \in \bar{M}$  из ее образов  $T^i x$  при  $1 \leq i \leq m_0$  можно выбрать хотя бы один такой, что  $\tau(T^i x) > \tau_0$ .

Иначе говоря, билиардные траектории не могут испытывать сколь угодно много отражений, находясь в малой окрестности одной из точек излома границы  $\partial Q$ .

Кроме того, отметим, что в силу гладкости компонент границы ее кривизна ограничена сверху и снизу:  $0 < \kappa_{\min} \leq \kappa(x) \leq \kappa_{\max} < \infty$ .

**2.2. Рассеивающие билиарды: гиперболическая структура.** Гладкую ( $C^1$ ) кривую  $\gamma \subset \bar{M}$  назовем *возрастающей (убывающей)*, если она задается уравнением  $\varphi = \varphi(r)$  и  $d\varphi/dr > 0$  ( $d\varphi/dr < 0$ ). Свойство возрастания (убывания) сохраняется под действием  $T$  ( $T^{-1}$ ). Назовем кривую  $\gamma$   *$m$ -возрастающей ( $m$ -убывающей)* при  $m \geq 1$ , если  $T^{-m} \gamma$  ( $T^m \gamma$ ) является возрастающей (убывающей) гладкой кривой. Все кривые разрыва из  $R_{1, \infty}$  ( $R_{-\infty, -1}$ ) являются возрастающими (убывающими).

Пусть возрастающая или убывающая кривая  $\gamma$  задана уравнением  $\varphi = \varphi(r)$ . Обозначим  $l(\gamma)$  ее евклидову длину в координатах  $(r, \varphi)$ . Величина

$$(2.1) \quad p(\gamma) = \int_{\gamma} \cos \varphi dr$$

называется  *$p$ -длиной кривой  $\gamma$* , и она будет для нас гораздо важнее  $l$ -длины. В дальнейшем в тексте, если не оговорено противное, под длиной кривых мы будем понимать именно  $p$ -длину.

Все возрастающие (убывающие) кривые растягиваются под действием  $T$  ( $T^{-1}$ ) (в смысле  $p$ -длины). Локальный коэффициент растяжения возрастающих (убывающих) кривых под действием  $T^n$  при  $n \geq 1$  ( $n \leq -1$ ) всегда растет экспоненциально:

$$(2.2) \quad p(T^n \gamma) / p(\gamma) \geq \Lambda_0^{\lfloor |n|/m_s \rfloor}$$

для некоторого  $\Lambda_0(Q) > 1$ . Тем самым, гиперболичность отображения  $T$  близка к *равномерной*, и в силу двумерности граничного фазового пространства  $\bar{M}$  она является *полной* (определения см., например, в [16]). Однако отображение  $T$  не является равномерно гиперболическим, так как углы между  $m$ -возрастающими и  $m$ -убывающими кривыми не отделены от нуля для любого  $m \geq 1$ . Точнее, для любой 1-возрастающей и 1-убывающей кривой  $|d\varphi/dr| \geq \text{const} > 0$ , но оценка сверху выглядит весьма слабо:  $|d\varphi/dr| \leq \text{const} (d(r))^{-1/2}$ , где  $d(r)$  означает расстояние от точки  $r \in \Gamma_i \subset \partial Q$  до ближайшего конца кривой  $\Gamma_i$ . Это значит, что в окрестности множества  $V_0$

устойчивые и неустойчивые направления могут быть одновременно почти параллельны касательной к  $V_0$ . Точнее, подобное явление происходит лишь в окрестности *конечного числа точек*, лежащих на  $V_0 \setminus S_0$ , но и оно усложнит наши выкладки в Приложении 1 (п. П1.3).

Отметим, что  $l$ - и  $p$ -длины  $m_0$ -возрастающих и  $m_0$ -убывающих кривых  $\gamma$  связаны соотношением

$$(2.3) \quad \text{const}_1(Q)p(\gamma) \leq l(\gamma) \leq \text{const}_2(Q)\sqrt{p(\gamma)}.$$

У почти каждой точки  $x \in \bar{M}$  имеются *локальные устойчивое и неустойчивое многообразия* (сокращенно, ЛУМ и ЛНМ), проходящие через  $x$ . Будем обозначать максимальный гладкий отрезок (включая концы) этого ЛНМ (ЛУМ) через  $\gamma^u(x)$  ( $\gamma^s(x)$ ). Длина этих отрезков ограничена из-за разрывности отображения  $T$ , и более того, сколь угодно короткие ЛНМ и ЛУМ всюду плотны в  $M$ .

Касательные направления к ЛНМ  $\gamma^u(x)$  и к ЛУМ  $\gamma^s(x)$  в точке  $x$  образуют углы с осью  $r$ , которые мы обозначим  $\psi^u(x)$  и  $\psi^s(x)$ , соответственно. Они задаются соотношениями

$$(2.4) \quad \begin{cases} \text{tg } \psi^u(x) = B^u(x) \cos \varphi(x) + \kappa(x), \\ \text{tg } \psi^s(x) = -B^s(x) \cos \varphi(x) + \kappa(x). \end{cases}$$

Здесь

$$(2.5) \quad B^s(x) = \frac{1}{\tau(x) + \frac{1}{R(Tx) + \frac{1}{\tau(Tx) + \frac{1}{R(T^2x) + \dots}}}}$$

— цепная дробь, в которой обозначено  $R(x) = 2\kappa(x)/\cos \varphi(x)$ . Величина  $B^u(x)$  определяется аналогично по полутраектории  $T^n x$  при  $n \leq 0$ :  $B^u(x) = R(x) + \frac{1}{\tau(T^{-1}x) + \frac{1}{R(T^{-1}x) + \frac{1}{\tau(T^{-2}x) + \dots}}}$ . Значение  $B^u(x)$  ( $B^s(x)$ ) равно кривизне пучка траекторий, образующих ЛНМ  $\gamma^u(x)$  (ЛУМ  $\gamma^s(x)$ ), в момент *после* отражения в точке  $x$ . Обозначим также  $B_-^u(x) = B^u(x) - R(x)$  и  $B_-^s(x) = B^s(x) + R(x)$  кривизны этих пучков в момент *перед* отражением в точке  $x$ . Кстати,  $p$ -длина ЛНМ  $\gamma^u(x)$  (ЛУМ  $\gamma^s(x)$ ) определяет длину ортогонального сечения соответствующего пучка траекторий в момент *отражения*. Обозначим  $\lambda^u(x) = 1 + \tau(x)B^u(x)$  ( $\lambda^s(x) = 1 + \tau(x)B_-^s(Tx)$ ) коэффициент растяжения ЛНМ  $\gamma^u(x)$  (сжатия ЛУМ  $\gamma^s(x)$ ) под действием  $T$  (в смысле  $p$ -длины).

Для  $x, y \in \bar{M}$  обозначим  $[x, y] = \gamma^s(x) \cap \gamma^u(y)$  (эта точка не всегда существует, так как ЛНМ и ЛУМ могут быть сколь угодно короткими). Для  $A, B \subset \bar{M}$  обозначим  $[A, B] = \{[x, y]: x \in A, y \in B\}$ . Для  $A \subset \bar{M}$  обозначим  $\gamma_A^{u,s}(x) = A \cap \gamma^{u,s}(x)$ .

Подмножества  $A \subset \gamma^u(x_0)$  и  $B \subset \gamma^u(y_0)$  называются *канонически изоморфными*, если для любого  $x \in A$  точка  $[x, y_0] \in B$  и наоборот. В этом случае отображение  $A \rightarrow B$ , переводящее  $x$  в точку  $[x, y_0]$ , называется *каноническим изоморфизмом*. Если рассматривать  $p$ -длину как меру на отрезках  $\gamma^u(x_0)$  и  $\gamma^u(y_0)$ , то канонический изоморфизм абсолютно непрерывен [13, 29] и имеет якобиан в любой точке плотности  $x$  множества  $A$ , который мы обозначим  $J^u(x)$ . Для любого  $A \subset \bar{M}$  и ЛНМ  $\gamma^u(x_0)$  назовем  $[A, x_0]$  *канонической проекцией* множества  $A$  на кривую  $\gamma^u(x_0)$ .

**2.3. Бильярды с бесконечным горизонтом.** Если  $Q$  — область на торе, то длина свободного пробега  $\tau(x)$  может быть неограниченной. В этом случае функции  $\tau_{\pm}(x)$  имеют особенности, которые следует описать более под-

робно. Функция  $\tau_+(x)$  (или  $\tau_-(x)$ ) может быть неограниченной только в окрестности конечного числа точек, лежащих на  $R_0$ , которые называются *и-особыми* (*s-особыми*). Назовем их также *особыми точками типа бесконечного горизонта* (еще один вид особых точек встретится нам в п. 2.5). Эти особые точки могут иметь три подтипа:  $S$ ,  $V$  и  $SV$  в зависимости от того, лежат ли они на  $S_0 \setminus V_0$ ,  $V_0 \setminus S_0$  или  $S_0 \cap V_0$  (подробнее см. [8], § 4). Каждый из подтипов характеризуется своей структурой кривых разрыва из  $R_{-1}$  (для  $s$ -особых точек из  $R$ ), которые накапливаются в окрестности особой точки. Отметим, что если граница  $\partial Q$  гладкая, то все  $i$ - и  $s$ -особые точки совпадают и имеют один тип  $S$ .

Кривые разрыва разбивают окрестность особой точки на счетное число областей (ячеек). С приближением к особой точке ячейки становятся мельче, функция  $\tau_{\pm}(x)$  в них растет, а коэффициент растяжения ЛНМ (сжатия ЛУМ) за одну итерацию отображения  $T^{\pm 1}$  увеличивается до бесконечности. Если пронумеровать ячейки (и ограничивающие их кривые разрыва) в естественном порядке (т. е. в порядке приближения к особой точке [8]), то в  $n$ -й ячейке функция  $\tau_{\pm}(x)$  равна  $\approx \text{const} \cdot n$ , а коэффициент растяжения ЛНМ (сжатия ЛУМ) равен  $\approx \text{const} \cdot n^d$ ; где  $d = 3/2$  для особых точек типов  $S$  и  $SV$  и  $d = 1$  для особых точек типа  $V$ .

**З а м е ч а н и е 2.2.** В окрестностях особых точек подтипа  $V$  любой ЛНМ пересекает лишь конечное число кривых из  $R_{-1}$  с номерами от  $N_1$  до  $N_2$ , для которых  $N_2 \leq \text{const} N_1$ . Отметим также, что образы и прообразы ячеек из окрестности особых точек типа  $V$  уже не лежат в окрестностях этих или других особых точек (поэтому в [8] они названы «блуждающими ячейками»). Точнее, ячейкам с номерами  $\geq n$  требуется не менее  $N(n)$  итераций отображения  $T^{\pm 1}$ , чтобы их образы пересекли другие ячейки с номерами  $\geq n$  около особых точек (здесь  $N(n) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ ).

**2.4. Полураसेивающие билиарды.** В полураसेивающих билиардах отражения от нейтральных компонент границы являются не более чем «мешающим фактором», поскольку они не приводят к растяжениям и сжатиям. Чтобы исключить влияние этого фактора, мы переходим к производному отображению на более «узком», чем в п. 2.1, граничном фазовом пространстве. Обозначим  $\partial^+ Q$  объединение всех раसेивающих компонент границы  $\partial Q$  и рассмотрим пространство  $M = \{(q, v): q \in \partial^+ Q, (v, n(q)) > 0\}$ . На замыкании  $\bar{M}$  построим производный автоморфизм  $T$ . Для точек  $x \in \bar{M}$  обозначим  $k(x)$  номер первого отражения траектории точки  $x$  от  $\partial^+ Q$ . Мы налагаем дополнительное условие:

**У с л о в и е В.** Функция  $k(x)$  равномерно ограничена:  $k(x) \leq \text{const} < \infty$ .

При этом условии кривые разрыва  $R_1$  и  $R_{-1}$  могут накапливаться только в окрестностях особых точек типа бесконечного горизонта.

В некоторых случаях можно отказаться от слишком стеснительного условия В и с помощью нескольких отражений области  $Q$  относительно нейтральных компонент границы  $\partial Q$  свести систему к раसेивающему билиарду на торе (см. [8], § 6). Такие случаи также годятся для нас, так как отображение  $T$  будет иметь те же свойства, что и в соответствующем раसेивающем билиарде.

Однако если в области  $Q$  общего положения условие В нарушено, то описание структуры кривых разрыва отображения  $T$  в окрестностях особых точек (где функция  $k(x)$  неограничена) остается пока не решенной задачей.

**2.5. Билиарды с фокусирующими компонентами границы.** На фокусирующие компоненты границы  $\partial Q$  мы накладываем следующие условия:



Окрестность описанных выше особых точек разбивается кривыми из  $R_1$  на счетное число ячеек. В  $n$ -й ячейке собраны траектории, испытавшие ровно  $n$  отражений подряд от данной фокусирующей компоненты. Любой ЛНМ  $\gamma_0$  с концами в  $x$  и  $y$ , лежащий в  $n$ -й ячейке, имеет производную  $d\varphi/dr \approx \text{const} \cdot n$  (естественно,  $\text{const} < 0$ ), для него  $\cos \varphi(x) \approx \cos \varphi(y) \approx \text{const}/n$  и  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \text{const}/n^2$ . Отсюда легко вывести оценки

$$(2.6) \quad |r(x) - r(y)| \leq \text{const} \sqrt{p(\gamma_0)},$$

$$(2.7) \quad \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\cos \varphi(x)_\pm^2} \leq \text{const} (p(\gamma_0))^{1/3},$$

которые понадобятся нам в Приложении 1. Также легко вывести, что  $p(\gamma_0)/p(T^{-1}\gamma_0) \approx \text{const} \cdot n$  и  $p(T\gamma_0)/p(\gamma_0) \approx \text{const} \cdot n$ , поэтому коэффициент растяжения ЛНМ за две итерации отображения  $T$  (от  $T^{-1}\gamma_0$  до  $T\gamma_0$ ) не ниже  $\text{const} \cdot n^2$ .

2.6. «Стадионы». Условие В в п. 2.5, как и в п. 2.4, является весьма стеснительным. Здесь мы рассмотрим одну область, не удовлетворяющую ему — так называемый стадион. Она ограничена двумя параллельными отрезками и двумя одинаковыми дугами окружностей (см. рис. 2, б). Дополнение каждой дуги до полного круга не должно пересекаться или касаться другой дуги. Биллиард в стадионе имеет самостоятельные приложения (см. [7]).

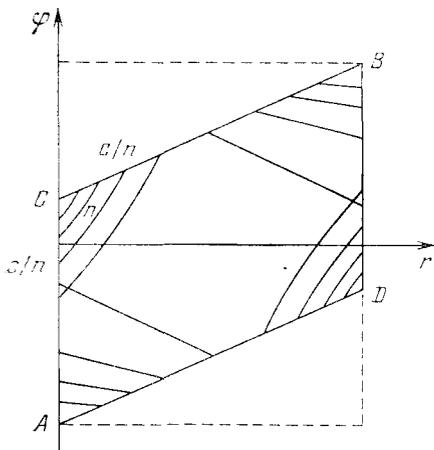


Рис. 4

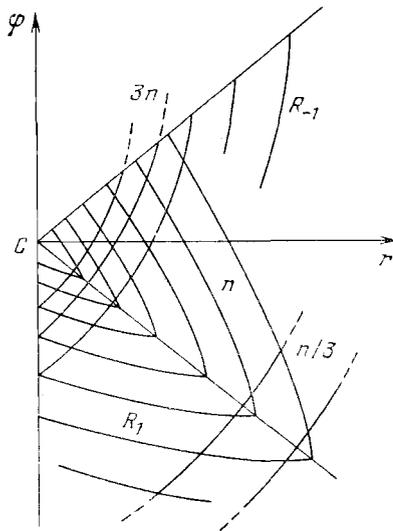


Рис. 5

Гиперболичность и эргодичность этого биллиарда доказана в [21]. Если дуги, ограничивающие стадион, меньше полуокружности, то они не удовлетворяют условию Ф1, но с помощью отождествления боковых стенок (отрезков) можно перейти к биллиарду на торе, ограниченному только двумя дугами, для которых Ф1 выполнено.

Граничное фазовое пространство  $M$  состоит из двух одинаковых параллелограммов (рис. 4). В окрестностях точек  $C$  и  $D$  также накапливается бесконечное число кривых разрыва (из  $R_{-1}$ ), структура которых описана в [8]. Они порождены неограниченной длиной свободного пробега (при переходе траекторий с одной дуги на другую), поэтому будем называть  $C$  и  $D$ ,

как и в п. 2.3, особыми точками типа бесконечного горизонта. Если дуги границы стадиона строго меньше полуокружности, то свойства этих особых точек полностью аналогичны свойствам особых точек подтипа  $V$  (см. замечание 2.2 о «блуждающих ячейках»). Если же стадион ограничен полуокружностями, то ячейки в окрестностях точек  $C$  и  $D$  уже не блуждают: там происходит наложение кривых разрыва из  $R_1$  и из  $R_{-1}$  (рис. 5). В этом случае несложные выкладки дают нам следующие оценки:

**Л е м м а 2.3.** Коэффициент растяжения любого ЛНМ, лежащего в  $n$ -й ячейке, под действием  $T$  не меньше  $4n$ . Любой ЛНМ в окрестности точек  $C$  и  $D$  пересекает лишь конечное число кривых разрыва  $R_{-1}$  с номерами от  $N_1$  до  $N_2$ , причем  $N_2 \leq 9N_1 + \text{const}$ .

В заключение сделаем одно общее замечание к пп. 2.4—2.6.

**З а м е ч а н и е 2.4.** Для бильярдов с нейтральными и фокусирующими компонентами границы мы, как и в [8], построили производное отображение  $T$  на очень «узком» граничном фазовом пространстве  $M$ . В [8] мы затем смогли доопределить марковское разбиение и на более широком (и естественном) пространстве  $M_1 = \{(q, v): q \in \partial Q, (v, n(q)) > 0\}$ . В данной работе мы изучаем гораздо более тонкие статистические свойства динамических систем, которые могут сильно меняться при переходе от  $T$  к производному отображению  $T_1$ , построенному на  $M_1$ . Например, существенно меняется «счетчик» числа столкновений ( $T^n x = T_1^N x$  при  $N \geq n$ , причем  $N$  может быть *намного* больше  $n$ ), поэтому скорость убывания корреляций может значительно уменьшиться. В частности, как показывают численные расчеты [36], для стадиона она становится степенной ( $\sim \text{const} \cdot N^{-a}$  для некоторого  $a > 0$ ).

### § 3. Марковское решето: локальные конструкции

В этом параграфе мы подготовим весь необходимый материал для построения марковского решета, которое будет проведено в § 4. При этом будет введен ряд новых понятий и доказана серия утверждений о локальном поведении отображения  $T$ . По возможности мы придаем нашим утверждениям наглядный характер, вынося технические выкладки в приложения.

**3.1. Параллелограммы и их меры.** По традиции, элементы марковских разбиений в гиперболических системах называются *параллелограммами*. В случае бильярдных отображений параллелограммом является множество  $U \subset \bar{M}$  такое, что  $v(U) > 0$  и для любой пары  $x, y \in U$  точка  $[x, y]$  определена и лежит в  $U$ . Иначе говоря, это множество, получающееся при пересечении семейства ЛНМ  $\{\gamma^u\}$  с семейством ЛУМ  $\{\gamma^s\}$  таких, что *каждое* ЛНМ  $\gamma^u$  пересекается с *каждым* ЛУМ  $\gamma^s$ . В этом смысле параллелограмм  $U$  имеет структуру прямого произведения. Поэтому  $U$  можно также представить в виде

$$(3.1) \quad U = [\gamma_U^u(x_0), \gamma_U^s(x_0)]$$

для произвольной точки  $x_0 \in U$ . Если точка  $x_0$  фиксирована, то ЛНМ  $\gamma^u(x_0)$  и ЛУМ  $\gamma^s(x_0)$  будем называть *координатными осями* в  $U$ .

В бильярдных системах из-за наличия разрывов сколь угодно короткие ЛНМ и ЛУМ всюду плотны в  $M$  (подробное объяснение см. [8]). Поэтому параллелограммы представляют собой нигде не плотные множества канторовского типа, имеющие положительную меру. Пределом (в метрике  $C^0$ ) последовательности ЛНМ или ЛУМ может быть только ЛНМ или ЛУМ (см. [8, лемма 2.11]), поэтому замыкание (в  $\bar{M}$ ) любого параллелограмма также является параллелограммом.

Нам потребуются удобные формулы для меры параллелограммов. Пусть  $U$  — параллелограмм,  $U_0$  — некий «объемлющий» параллелограмм, т. е.  $U_0 \supset U$ , и в  $U_0$  выбрана точка  $x_0$ , фиксирующая координатные оси в  $U_0$ . Каноническую проекцию параллелограмма  $U$  на оси  $\gamma^u(x_0)$  и  $\gamma^s(x_0)$  обозначим  $\Gamma_U^u$  и  $\Gamma_U^s$ , соответственно. Тогда, аналогично (3.1),

$$(3.2) \quad U = [\Gamma_U^u, \Gamma_U^s].$$

Разобьем кривые  $\gamma^u(x_0)$  и  $\gamma^s(x_0)$  на мелкие подотрезки  $\Delta_i^u \subset \gamma^u(x_0)$  и  $\Delta_j^s \subset \gamma^s(x_0)$ . Их «прямые произведения»  $[\Delta_i^u, \Delta_j^s]$  индуцируют разбиения множества  $U$  на подпараллелограммы  $\Delta_{ij} = [\Delta_i^u \cap \Gamma_U^u, \Delta_j^s \cap \Gamma_U^s]$ .

Для достаточно мелких параллелограммов  $\Delta$  их  $\nu$ -мера приблизительно равна  $\nu(\Delta) \approx c_\nu m(\Delta) \cos \varphi(x)$ , где  $m(\cdot)$  — мера Лебега в координатах  $r, \varphi$ , а  $x \in \Delta$  — некоторая точка. Если зафиксировать точку  $x \in \Delta$ , то можно написать  $m(\Delta) \approx l(\gamma_\Delta^u(x)) \cdot l(\gamma_\Delta^s(x)) \cdot \sin(\psi^u(x) - \psi^s(x))$ . Легко видеть, что  $l(\gamma_\Delta^u(x)) \approx p(\gamma_\Delta^u(x)) / (\cos \varphi(x) \cos \psi^u(x))$  и  $l(\gamma_\Delta^s(x)) \approx p(\gamma_\Delta^s(x)) / (\cos \varphi(x) \cos \psi^s(x))$ , поэтому в силу (2.4)  $\nu(\Delta) \approx p(\gamma_\Delta^u(x)) p(\gamma_\Delta^s(x)) (B^u(x) + B^s(x)) c_\nu$ .

Вернувшись к нашему параллелограмму  $U$ , составим интегральную сумму  $\nu(U) = \sum \nu(\Delta_{ij})$  и переходя к пределу, как в обычном определении интеграла, получим

$$(3.3) \quad \nu(U) = c_\nu \int_U (B^u(x) + B^s(x)) dv_U(x),$$

где через  $dv_U(x)$  обозначена мера на  $U$ , являющаяся прямым произведением мер  $p(\cdot)$  на множествах  $\gamma_U^u(x)$  и  $\gamma_U^s(x)$ . В силу абсолютной непрерывности слоений ЛНМ и ЛУМ [13, 29] почти любая точка  $x \in U$  является точкой плотности множества  $\gamma_U^{u,s}(x)$  на ЛНМ  $\gamma^u(x)$  (ЛУМ  $\gamma^s(x)$ ) и потому для нее определен якобиан канонического изоморфизма этого множества на его проекцию  $\Gamma_U^u$  ( $\Gamma_U^s$ ) на соответствующую координатную ось. Этот якобиан мы обозначим  $J^u(x)$  ( $J^s(x)$ ). Тогда (3.3) примет вид

$$(3.4) \quad \nu_i(U) = c_\nu \int_{\Gamma_U^u} dp(y) \int_{\Gamma_U^s} dp(z) (B^u(x) + B^s(x)) J^u(x) J^s(x).$$

Здесь  $y \in \Gamma_U^u$  и  $z \in \Gamma_U^s$  такие точки, что  $[y, z] = x$ . Естественно рассматривать точки  $y$  и  $z$  как координаты точки  $x$  на осях  $\gamma^u(x_0)$  и  $\gamma^s(x_0)$ . Важно отметить, что все функции, стоящие под интегралом в (3.4), определяются точкой  $x$  и не зависят от выбора параллелограмма  $U$ .

**3.2. Слабая однородность параллелограммов.** Формула (3.4) представляет параллелограмм  $U$  в виде прямого произведения в метрическом (а не только в топологическом, как в (3.2)) смысле. Однако по-настоящему удобной она становится только тогда, когда подынтегральная функция почти постоянна. Для таких параллелограммов мы введем понятие однородности.

Зафиксируем некоторые постоянные  $\alpha_0 < 1$  и  $C_0 > 0$ .

О п р е д е л е н и е 3.1. Параллелограмм  $U$  называется *слабо  $n$ -однородным* ( $n \geq 0$  — целое), если выполнены четыре условия:

- (01)  $|B^u(x)/B^u(y) - 1| \leq C_0 \alpha_0^n$ ;
- (02)  $|B^s(x)/B^s(y) - 1| \leq C_0 \alpha_0^n$ ;
- (03)  $|J^u(x) - 1| \leq C_0 \alpha_0^n$ ;
- (04)  $|J^s(x) - 1| \leq C_0 \alpha_0^n$ .

для любых точек  $x, y \in U_0$  и любой точки  $x_0 \in U_0$ , фиксирующей координатные оси  $\gamma^u(x_0)$  и  $\gamma^s(x_0)$ .

Следующая лемма легко вытекает из (3.4):

**Л е м м а 3.2.** *Для слабо  $n$ -однородных параллелограммов  $U_0$  меру их подпараллелограммов  $U$  можно аппроксимировать величиной*

$$(3.5) \quad v_a(U) = c_\nu p(\Gamma_U^u) p(\Gamma_U^s)(B^u(x_0) + B^s(x_0)).$$

Более точно,

$$(3.6) \quad |v_a(U)/v(U) - 1| \leq C_1 \alpha_0^n,$$

где  $C_1 = C_1(C_0, \alpha_0)$ .

Выведем одно следствие из формул (3.5)–(3.6). Параллелограмм  $U' \subset U$  называется  $u$ -вписанным ( $s$ -вписанным) в  $U$ , если  $\gamma_{U'}^u(x) = \gamma_U^u(x)$  (соответственно  $\gamma_{U'}^s(x) = \gamma_U^s(x)$ ) для любой точки  $x \in U'$ . Пусть  $U'$  — произвольный параллелограмм,  $u$ -вписанный в  $U$ , и  $U''$  — произвольный параллелограмм,  $s$ -вписанный в  $U$ . Предположим также, что  $U$  слабо  $n$ -однороден. Тогда из (3.5) и (3.6) вытекает равенство

$$(3.7) \quad |v(U''/U)/v(U'/U') - 1| \leq C_2 \alpha_0^n,$$

где  $C_2 = C_2(C_1, \alpha_0)$  (здесь  $v(A/B)$  означает условную меру).

**3.3. Однородные ЛНМ и ЛУМ.** Определенные выше слабо  $n$ -однородные параллелограммы необходимо научиться строить. Отметим, что для слабой  $n$ -однородности недостаточно малости диаметра параллелограмма. Например, если две части параллелограмма  $U$  лежат по разные стороны от некоторой кривой  $\gamma \subset R_{0,k}$  при небольшом значении  $k$ , то величина  $B^u(x)$  испытывает скачок при переходе через  $\gamma$ , который не исчезает, если  $\text{diam } U \rightarrow 0$ . Поэтому для слабой  $n$ -однородности надо дополнительно потребовать, чтобы образы параллелограмма  $U$  и в прошлом, и в будущем достаточно долго не испытывали разрывов. Кроме того, необходимо, чтобы функции  $B^{u,s}(x)$  не испытывали сильных колебаний внутри параллелограмма  $U$  и его образов  $T^i U$  при небольших (по модулю) значениях  $i$ . Эти функции имеют особенности на множестве  $S_0 \subset \partial M$ , а при наличии точек излома на границе  $\partial Q$  — еще и в конечном числе «особых» точек на  $V_0$ , упомянутых в § 2 и описанных подробнее в Приложении 1. Поэтому мы разбиваем окрестность множества  $S_0$  и некоторую окрестность  $V_*$  множества данных «особых» точек на счетное число сужающихся к  $S_0$  и к «особым» точкам подобластей, внутри которых функции  $B^{u,s}(x)$  не испытывают больших колебаний.

Зафиксируем некоторое  $\nu > 1$  и целое  $n_0 \geq 1$ . Проведем в  $\bar{M}$  счетное число отрезков, задаваемых уравнениями  $\varphi = \pi/2 - n^{-\nu}$  и  $\varphi = -\pi/2 + n^{-\nu}$  при всех целых  $n \geq n_0$ . Набор этих отрезков обозначим  $\mathcal{I}_0$ . Рассмотрим также образы и прообразы точек этих отрезков, попадающие в множество  $V_*$  до тех пор, пока они не выходят из него. Эти точки образуют множество  $\mathcal{I}_1 \subset V_*$ , состоящее максимум из счетного числа кривых. Иначе говоря,  $\mathcal{I}_1$  состоит из образов отрезков  $\mathcal{I}_0$ , «застревающих» на некоторое время в малых окрестностях точек излома границы  $\partial Q$ . Точное определение множества  $\mathcal{I}_1$  будет дано в Приложении 1 (п. П1.3). Положим  $\mathcal{D} = \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_1$ .

О п р е д е л е н и е 3.3. Назовем отрезок ЛНМ  $\gamma^u$  (ЛУМ  $\gamma^s$ ) *однородным* (сокращенно ОЛНМ и ОЛУМ), если его образы  $T^{-n}\gamma^u$  ( $T^n\gamma^s$ ) при всех  $n \geq 0$  (т. е. при «движении в сторону сжатия») не пересекают отрезков и кривых из множества  $\mathcal{D}$  (но могут попадать на них своими концами) и, кроме того,  $T$  ( $T^{-1}$ ) гладко на  $\gamma^u$  ( $\gamma^s$ ) (т. е. одна итерация «в сторону растяжения» не должна приводить к разрыву).

Иначе говоря, построение ОЛНМ (ОЛУМ) можно осуществить, дробя произвольный ЛНМ (ЛУМ) в точках, образы которых в прошлом (в будущем) попадают в  $\mathcal{D}$ . Поэтому будем называть последние *кривыми дробления*, а отрезки из  $\mathcal{D}_0$  — *отрезками дробления*.

**О п р е д е л е н и е 3.4.** Пусть  $n \geq 1$  — целое. Назовем ЛНМ  $\gamma^u$  (ЛУМ  $\gamma^s$ ) *n-однородным*, если его образ  $T^n \gamma^u$  ( $T^{-n} \gamma^s$ ) является ОЛНМ (ОЛУМ).

Естественно, свойство *n-однородности* сильнее, чем просто однородности.

**О п р е д е л е н и е 3.5.** Параллелограмм  $U$  назовем *n-однородным*, если для любой его точки  $x$  множество  $\gamma_U^u(x)$ ,  $(\gamma_U^s(x))$  целиком лежит на одном *n-однородном* ЛНМ (ЛУМ).

Отметим, что замыкание всякого *n-однородного* параллелограмма в  $\bar{M}$  будет также *n-однородным* параллелограммом.

**Т е о р е м а 3.6.** *Параллелограммы, являющиеся n-однородными, будут и слабо n-однородными при соответствующем подборе констант в определенных 3.1 и 3.3—3.5. Точнее, константы  $\nu$  и  $n_0$  можно выбирать произвольно, а  $\alpha_0$  и  $C_0$  будут зависеть от них.*

Смысл этой теоремы довольно прозрачен, но ее доказательство длинное и носит большей частью технический характер, поэтому оно вынесено в Приложение 1.

Необходимо отметить, что *n-однородные* ЛНМ и ЛУМ обладают еще одним важным свойством. Обозначим  $\Lambda_i^u(x)$  при  $i \geq 1$  локальный коэффициент сжатия ЛНМ  $\gamma^u(x)$  в точке  $x$  под действием отображения  $T^{-i}$ .

**Л е м м а 3.7.** *Если ЛНМ  $\gamma^u$  n-однородно, то для любых  $x, y \in \gamma^u$  и  $i \geq 1$  справедлива оценка  $|\Lambda_i^u(x)/\Lambda_i^u(y) - 1| \leq C_4 \alpha_0^n$ , где  $C_4 > 0$  — постоянная. Аналогичная оценка справедлива для n-однородных ЛУМ.*

Доказательство леммы 3.7 также вынесено в Приложение 1.

Теорема 3.6 указывает способ построения *n-однородных* параллелограммов, но оставляет открытым вопрос о существовании *n-однородных* ЛНМ и ЛУМ. Действительно, если бы точки дробления заполняли плотно каждый ЛНМ (ЛУМ), то в них нельзя было выделить ни одного ОЛНМ (ОЛУМ).

**Т е о р е м а 3.8 (существование).** *Для почти любой точки  $x \in M$  существует ОЛНМ (ОЛУМ), содержащее точку  $x$  внутри себя.*

Максимальный гладкий отрезок ОЛНМ (ОЛУМ), проходящий через точку  $x$ , обозначим  $\gamma^{ou}(x)$  ( $\gamma^{os}(x)$ ).

**С л е д с т в и е 3.9.** *Для любого  $n \geq 1$  и для почти любой точки  $x$  существует n-однородное ЛНМ (ЛУМ), проходящее через  $x$ .*

Теорему 3.8 можно существованием образом уточнить, оценив распределение длин ОЛНМ и ОЛУМ в пространстве  $M$ . А именно, обозначим  $r^{ou}(x)$  ( $r^{os}(x)$ ) расстояние от точки  $x \in M$  до ближайшего конца кривой  $\gamma^{ou}(x)$  ( $\gamma^{os}(x)$ ) в  $p$ -метрике (если этой кривой не существует, то положим соответствующее расстояние равным нулю).

**Т е о р е м а 3.10.**  $\nu \{x \in M: r^{ou}(x) \leq \varepsilon\} \leq C_5 \varepsilon^\theta$ , где  $C_5 = C_5(\nu, n_0) > 0$  и  $\theta = \theta(\nu, n_0) > 0$ . Аналогичная оценка верна и для  $r^{os}(x)$ .

Следующее дополнение также полезно иметь в виду.

**П р е д л о ж е н и е 3.11.** *Для  $\nu$ -почти любого  $x \in M$  точки дробления на ЛНМ  $\gamma^u(x)$  (ЛУМ  $\gamma^s(x)$ ), разделяющие эту кривую на отдельные ОЛНМ (ОЛУМ), могут сгущаться лишь на концах этой кривой, но не имеют предельных точек внутри нее.*

Доказательство утверждений 3.8—3.11 очень похоже на метод построения ЛНМ и ЛУМ, описанный в [13, 29]. Оно вынесено в Приложение 2.

На этом мы закончим анализ свойств параллелограммов. Оставшаяся часть § 3 посвящена динамике отдельных ОЛНМ и ОЛУМ.

**3.4. Скорость растяжения ОЛНМ и ОЛУМ.** Цель этого и следующего разделов — изучить динамику ОЛНМ и ОЛУМ, когда они движутся под действием  $T^n$  «в сторону растяжения». Локальный коэффициент растяжения за  $n$  шагов растет экспоненциально по  $n$  (2.2), но глобальная картина гораздо сложнее, потому что растяжение сочетается с разрывами и дроблениями. В результате для каждого  $n \geq 1$  образ  $T^n \gamma^u$  ( $T^{-n} \gamma^s$ ) состоит из конечного или счетного числа ОЛНМ (ОЛУМ), среди которых могут быть сколь угодно короткие. Назовем эти ОЛНМ (ОЛУМ) *однородными компонентами* образа  $T^n \gamma^u$  ( $T^{-n} \gamma^s$ ). В данном разделе мы покажем, что средняя длина этих компонент все-таки растет экспоненциально по  $n$ , пока не станет величиной порядка единицы. Иначе говоря, процесс растяжения преобладает над контрпроцессами разрывов и дроблений. Важно подчеркнуть, что речь идет о *любом* ОЛНМ (ОЛУМ), а не о *почти любом*, как было ранее.

В дальнейшем изложении фигурируют только ОЛНМ, но аналогичные утверждения с заменой  $n$  на  $-n$  справедливы и для ОЛУМ.

Пусть  $\gamma^u$  — произвольное ОЛНМ длины  $p$  ( $\gamma^u = p$  и  $D > 0$ ). Для каждого  $n \geq 0$  выделим в  $\gamma^u$  подотрезки  $\gamma_{i,n}^u$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , которые переходят под действием  $T^n$  в однородные компоненты длины  $\geq D$ . Рассмотрим величину

$$p_{D, \gamma^u}(N) = p \left\{ \bigcup_{i, n \leq N} \gamma_{i,n}^u \right\} / p(\gamma^u).$$

Иначе говоря,  $p_{D, \gamma^u}(N)$  есть относительная доля точек кривой  $\gamma^u$ , образы которых за первые  $N$  шагов *хоть раз* попали в однородные компоненты длины  $\geq D$ .

**Теорема 3.12** (скорость растяжения). *Найдется такое  $D > 0$  и функция  $\beta(c)$ ,  $\beta(c) \rightarrow 0$  при  $c \rightarrow \infty$ , не зависящие от  $\gamma^u$  и  $p$ , и такие, что для любого  $c > 0$  выполнено  $p_{D, \gamma^u}(-[c \ln p]) \geq 1 - \beta(c)$ .*

Теорема 3.12 означает, что за первые  $N$  итераций отображения  $T$ , где  $N = -[c \ln p(\gamma^u)]$  большинство точек кривой  $\gamma^u$  хоть раз побывает в длинных однородных компонентах (длины  $\geq D$ ). Логарифмическая зависимость  $N$  от  $p(\gamma^u)$  означает экспоненциальную скорость растяжения средней длины однородных компонент образа  $T^n \gamma^u$ . По-существу, это ключевое свойство рассматриваемых гиперболических систем, определяющее быстрое убывание корреляций.

В более простом случае, когда дробления не учитываются (т. е. в качестве компонент множества  $T^n \gamma^u$  рассматриваются ЛНМ, а не ОЛНМ), аналогичное (и в некотором смысле более сильное) утверждение уже было доказано в [24]. Учет дроблений несколько усложняет доказательство теоремы. Мы приводим его в Приложении 3.

**3.5. Свойства транзитивности ОЛНМ и ОЛУМ.** В этом разделе мы продолжим изучать динамику ОЛНМ и ОЛУМ, когда они движутся под действием  $T^n$  «в сторону растяжения». Здесь мы предполагаем, что исходное ОЛНМ  $\gamma^u$  уже имеет длину порядка единицы. В этом случае его образам уже «некуда» растягиваться, и потому однородные компоненты этих образов начинают заполнять пространство  $M$ . Общие соображения, апеллирующие к свойству перемешивания преобразования  $T$  [13], подсказывают, что однородные компоненты множества  $T^n \gamma^u$  при больших  $n$  распределяются равномерно по  $M$ . Нам понадобится более слабое свойство, состоящее, грубо говоря, в том, что плотность заполнения пространства  $M$  упомянутыми компонентами отделена от нуля асимптотически при  $n \rightarrow \infty$ . Именно это свойство мы и называем *транзитивностью*. Строгие формулировки приведены ниже.

Прежде всего, введем ряд новых понятий для описания метрической структуры параллелограммов. Они помогут нам лучше сформулировать и нагляднее доказать свойство транзитивности.

Будем называть *четырёхугольником* область  $K \subset \bar{M}$ , ограниченную парой ЛНМ и парой ЛУМ, чередующихся друг с другом. Ограничивающие его ЛНМ (ЛУМ) назовем *и-границами* (*s-границами*). Для каждого параллелограмма  $U$  можно выделить минимальный четырёхугольник  $K(U)$ , содержащий его. Назовем  $K(U)$  *носителем* параллелограмма  $U$ , а под *и-* и *s-границами* последнего будем понимать соответствующие границы его носителя.

Далее, будем говорить, что ЛНМ  $\gamma^u$  (ЛУМ  $\gamma^s$ ) *натянута* на четырёхугольник  $K$  (параллелограмм  $U$ ), если его концы лежат *точно* на *s-границах* (*и-границах*) этого четырёхугольника (параллелограмма). Легко проверить, что если параллелограмм  $n$ -однороден, то его *и-* и *s-границы*, а также все натянутые на него ОЛНМ и ОЛУМ,  $n$ -однородны. Назовем  $n$ -однородный параллелограмм ( $n \geq 0$ ) *максимальным*, если он пересекается со всеми натянутыми на него ОЛНМ и ОЛУМ. Любой  $n$ -однородный параллелограмм можно дополнить до максимального с сохранением  $n$ -однородности и не раздвигая его границ. Назовем также *плотностью множества*  $A \subset M$  на кривой  $\gamma$  величину  $p(A \cap \gamma)/p(\gamma)$ .

Переходим к формулировке свойства транзитивности. Рассмотрим произвольный ОЛНМ  $\gamma^u$  длины  $p(\gamma^u) = p$  и произвольный 0-однородный максимальный параллелограмм  $U_0$  ненулевой меры. Для каждого  $n \geq 1$  выделим внутри  $\gamma^u$  подотрезки  $\hat{\gamma}_{i,n}^u$ ,  $i \geq 1$ , образы которых  $T^n \hat{\gamma}_{i,n}^u$  натянуты на параллелограмм  $U_0$  (если таковые имеются), и рассмотрим величину

$$p_n(\gamma^u, U_0) = p\left(\bigcup_i \hat{\gamma}_{i,n}^u\right)/p(\gamma^u).$$

**Теорема 3.13 (транзитивность).** *При описанных выше условиях  $p_n(\gamma^u, U_0) \geq \delta_0$ ,  $(p, U_0) > 0$  при всех  $n \geq n_0(p, U_0)$ , где величины  $\delta_0$  и  $n_0$  зависят от  $U_0$  и от длины  $p$  исходной кривой  $\gamma^u$ , но не зависят от ее положения.*

Теорема 3.13 означает, что если исходная кривая  $\gamma^u$  достаточно длинная, то в ее образе после достаточного количества итераций всегда найдется существенная часть, состоящая из ОЛНМ, натянутых на параллелограмм  $U_0$ . Из произвольности  $U_0$  следует, что компоненты образа кривой  $T^n \gamma^u$  при больших  $n$  фактически «расползаются» по  $M$  с отделенной от нуля плотностью. (В силу свойств перемешивания отображения  $T$  должна, видимо, существовать и какая-то связь величины  $\delta_0(p, U_0)$  с мерой  $\nu(U_0)$ , однако здесь этот вопрос не рассматривается.)

Вновь подчеркнем, что, как и в п. 3.4, речь идет о *любом* ОЛНМ  $\gamma^u$ . Двойственное утверждение справедливо и для любого ОЛУМ.

Доказательство теоремы 3.13 весьма наглядно и основано на ряде утверждений, представляющих и самостоятельный интерес, поэтому мы приведем его здесь, не вынося в приложения. Идеи доказательства представляются пригодными и для небиллиардных гиперболических отображений с особенностями.

**Лемма 3.14.** *Пусть  $\gamma$  — произвольная возрастающая кривая в  $\bar{M}$ . Тогда через почти каждую (в смысле  $p$ -меры) точку  $x \in \gamma$  проходит ЛУМ  $\gamma^s(x)$ .*

Утверждение леммы, по-существу, является аналогом основной теоремы теории гиперболических билиардов. В настоящее время известны две версии ее доказательства. Первая разработана в [13, 5, 6, 21], а вторая — более простая — в [15, 31, 25]. Из первой версии лемма 3.14 следует непосред-

ственно, а из второй она вытекает после небольшой и очевидной модификации в доказательстве, которую мы здесь не приводим.

Утверждения 3.11 и 3.14 немедленно влекут

**С л е д с т в и е 3.15.** Пусть  $\gamma$  — произвольная возрастающая кривая в  $\bar{M}$ . Тогда через почти каждую точку  $x \in \gamma$  проходит ОЛУМ  $\gamma^{os}(x)$ .

**З а м е ч а н и е 3.16.** Из абсолютной непрерывности слоений на ЛНМ и ЛУМ [13, 29] следует, что мера объединения всех ОЛУМ, о которых идет речь в следствии 3.15, положительна. Поэтому найдется  $\rho_0 = \rho_0(\gamma) > 0$  такое, что если проводить ОЛУМ только через точки  $\{x \in \gamma: r^{os}(x) \geq \rho_0\}$  (т. е. такие ОЛУМ, расстояние от концов которых до точки пересечения с  $\gamma$  не меньше  $\rho_0$ ), то мера их объединения также будет положительна. Кроме того, они «высекают» на  $\gamma$  множество,  $p$ -мера которого стремится к  $p(\gamma)$  при  $\rho_0 \rightarrow 0$ .

С помощью утверждений 3.15 и 3.16 в окрестности произвольного ОЛНМ  $\gamma^u$  при произвольных  $\varepsilon_1 > 0$  и  $d \in (0, 1/10)$  легко построить параллелограмм  $U_1$ , обладающий следующим набором свойств:

1.  $U_1$  0-однороден и максимален.
2.  $\gamma^u$  пересекает обе  $s$ -границы параллелограмма  $U_1$  и точки пересечения отстоят от концов кривой  $\gamma^u$  на расстояние, большее, чем  $dp(\gamma^u)$ .
3. Для каждого ОЛУМ  $\gamma^s$ , натянутого на  $U_1$ , точка пересечения  $\gamma^s \cap \gamma^u$  отстоит от концов  $\gamma^s$  на расстояние, большее, чем  $dp(\gamma^s)$  (иначе говоря, кривая  $\gamma^u$  проходит где-то в центральной части четырехугольника  $K(U_1)$ , не подходя слишком близко к его  $u$ -границам).
4. Плотность параллелограмма  $U_1$  на любом натянутом на него ОЛУМ не меньше, чем  $1 - \varepsilon_1$ .

Назовем параллелограмм  $U_1$ , обладающий свойствами 1—4, *плотным участком* (с параметрами  $\varepsilon_1$  и  $d$ ) для ОЛНМ  $\gamma^u$ .

**Л е м м а 3.17** (о конечных наборах плотных участков). Для любых  $p > 0$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  и  $d \in (0, 1/10)$  в пространстве  $\bar{M}$  можно выделить конечный набор параллелограммов так, что для каждого ОЛНМ длины  $\geq p$  один из этих параллелограммов будет плотным участком с параметрами  $\varepsilon_1$  и  $d$ .

Для доказательства введем на множестве всех ОЛНМ метрику, определяемую максимумом расстояний от каждой точки одного ОЛНМ до ближайшей точки другого, и наоборот. В силу компактности пространства подмножество всех ОЛНМ длины  $\geq p$  компактно для любого  $p > 0$ . Легко также видеть, что каждый параллелограмм  $U_1$  служит плотным участком для некоторого открытого подмножества ОЛНМ длины  $\geq p$  (возможно, пустого), откуда и вытекает лемма.

Зафиксируем  $d \in (0, 1/10)$ , достаточно малое  $\varepsilon_1 > 0$  и плотный участок с параметрами  $\varepsilon_1, d$  для кривой  $\gamma^u$  из условия теоремы 3.13.

Оставим на время параллелограмм  $U_1$  и вернемся к параллелограмму  $U_0$  из условия теоремы 3.13. Из абсолютной непрерывности слоений ЛНМ и ЛУМ следует, что почти любая точка  $x \in U_0$  является точкой плотности измеримого множества  $\gamma_{U_0}^s(x)$  на кривой  $\gamma^s(x)$ . Из определения точки плотности вытекает, что для любого  $\varepsilon_2 > 0$  найдется  $l_0 > 0$  и подмножество  $\tilde{U}_0 \subset \subset U_0$  ненулевой меры такое, что на любом ОЛУМ, пересекающем  $\tilde{U}_0$  и имеющем  $p$ -длину меньше, чем  $l_0$ , параллелограмм  $U_0$  имеет плотность  $\geq 1 - \varepsilon_2$ . При этом множество  $\tilde{U}_0$ , конечно, не обязано быть параллелограммом.

Зафиксируем достаточно малое  $\varepsilon_2 > 0$  и соответствующее множество  $\tilde{U}_0$ .

Рассмотрим множество  $T^n U_1$  при произвольном  $n \geq 1$ . Оно состоит из конечного числа 0-однородных параллелограммов. Обозначим  $U_{1,n}, \dots, U_{k(n),n}$  те из них, которые пересекают множество  $\tilde{U}_0$ . Из свойства перемешивания отображения  $T$  и из леммы 3.17 следует, что при всех

$n \geq n'(p, \varepsilon_1, d, U_0, \varepsilon_2)$  выполнено

$$(3.8) \quad \sum_{i=1}^{k(n)} \nu(U_{i,n} \cap U_0) > q_1,$$

где  $q_1 = q_1(p, \varepsilon_1, d, U_0, \varepsilon_2) > 0$ .

Каждый из параллелограммов  $U_{i,n}$ ,  $1 \leq i \leq k(n)$ , под действием канонического изоморфизма проектируется на одну из однородных компонент  $\gamma_{i,n}^u$  образа  $T^n \gamma^u$ , причем разные параллелограммы  $U_{i,n}$  проектируются на разные однородные компоненты  $\gamma_{i,n}^u$ . (Собственно говоря, по причине такого соответствия мы и изучаем столь подробно свойства однородных компонент образов ЛНМ и ЛУМ; в § 4 мы выведем из них нужные свойства самих параллелограммов.)

**Л е м м а 3.18.** *Каждая однородная компонента  $\gamma_{i,n}^u$ ,  $1 \leq i \leq k(n)$ , пересекает обе  $s$ -границы параллелограмма  $U_0$ , если только  $n$  достаточно велико ( $n \geq n'(U_0, \varepsilon_2)$ ), а  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  достаточно малы.*

Доказательство опирается на одно геометрическое построение, проиллюстрированное на рис. 6. Выберем точку  $y \in U_{i,n} \cap U_0$  и, соответственно, ОЛУМ  $\gamma_1^s = \gamma^s(T^{-n}y) \cap K(U_1)$ . При достаточно больших  $n$  его образ  $\gamma_0^s = T^n \gamma_1^s$  имеет длину  $< l_0$  и потому плотность параллелограмма  $U_0$  на кривой  $\gamma_0^s$  не ниже  $1 - \varepsilon_2$ . Отсюда и из свойств 3, 4 плотного участка  $U_1$  следует, что при достаточно малых  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  на кривой  $\gamma_0^s$  найдется «достаточно много» точек множества  $T^n U_1 \cap U_0$ , и точка  $\gamma_{i,n}^u \cap \gamma_0^s$  лежит между какими-то двумя точками  $y_1, y_2 \in T^n U_1 \cap U_0$ . Рассмотрим четырехугольник  $K^*$ , ограниченный ЛНМ  $\gamma^u(y_1)$ ,  $\gamma^u(y_2)$  и  $s$ -границами параллелограмма  $U_0$ . Легко видеть, что его прообразы  $T^{-i}K^*$  при всех  $i = 1, 2, \dots, n$  не пересекают кривых разрыва и дробления, откуда и следует лемма.

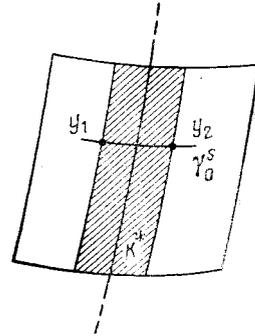


Рис. 6

Лемма 3.18 показывает, что на каждой однородной компоненте  $\gamma_{i,n}^u$  образа  $T^n \gamma^u$  найдется подотрезок  $\hat{\gamma}_{i,n}^u$ , натянутый на  $U_0$ . Ясно, что  $p(\hat{\gamma}_{i,n}^u) \geq \geq \text{const}(U_0) \cdot p(\gamma_{i,n}^u)$ , поэтому (лемма 3.7)  $p(T^{-n} \hat{\gamma}_{i,n}^u) \geq C_4^{-1} \text{const}(U_0) \cdot p(T^{-n} \gamma_{i,n}^u)$ . Отсюда и из (3.8) вытекает оценка

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^{k(n)} p(T^{-n} \hat{\gamma}_{i,n}^u) \geq q_2 \sum_{i=1}^{k(n)} \nu(T^{-n}(U_{i,n} \cap U_0)) > q_1 q_2,$$

где величина  $q_2 = q_2(p, \varepsilon_1, d, U_0, \varepsilon_2) > 0$  появляется после применения формулы (3.4) для вычисления меры параллелограммов  $T^{-n}(U_{i,n} \cap U_0)$  с учетом 0-однородности  $U_1$  и леммы 3.17. Неравенство (3.9) справедливо при всех  $n \geq \max\{n', n''\}$ , что доказывает теорему 3.13.

Последовательно применяя теоремы 3.12 и 3.13, получаем следующее общее утверждение:

**Т е о р е м а 3.19.** *Пусть ОЛНМ  $\gamma^u$  и параллелограмм  $U_0$  удовлетворяют условиям теоремы 3.13. Тогда  $p_n(\gamma^u, U_0) > \delta_1(U_0)$  при всех  $n \geq \geq -[C^{(1)} \ln p] + n_1(U_0)$ , где величины  $\delta_1(U_0)$  и  $n_1(U_0)$  зависят только от  $U_0$ , и  $C^{(1)} = C^{(1)}(Q) > 0$ .*

## § 4. Марковское решето: глобальные конструкции

Марковское решето является тем инструментом, применение которого позволит нам сравнительно быстро вывести теоремы 1.1 и 1.2 в §§ 5, 6. Оно, по-видимому, также пригодно и для дальнейшего, более детального исследования статистических свойств гиперболических бильярдов, поэтому мы стараемся описать его в максимально общем, и в то же время, подробном виде.

**4.1. Определение и основные свойства.** Марковское решето задается двумя целочисленными параметрами  $N > n > 0$ . Отметим сразу, что  $N$  — длина отрезка времени, на котором мы будем аппроксимировать наш процесс  $\{X_i\}$  процессом марковского типа (как разъяснялось в § 1). Формально мы не накладываем на  $N$  и  $n$  других ограничений, но полезно иметь в виду, что нас будут интересовать случаи, когда  $N, n \rightarrow \infty$  и  $n \sim N^\gamma$  при некотором  $\gamma < 1$ .

Марковским решето с параметрами  $n, N$  мы называем конечное разбиение пространства  $M$ :  $\mathcal{R}_{n, N} = \{V_0, V_1, \dots, V_I\}$ , где  $I = I(n, N)$ ,  $\nu(V_i \cap V_j) = 0$  при  $i \neq j$  и  $\bigcup V_i = \bar{M}$ , которое обладает следующими четырьмя свойствами:

Свойство MP1 (размеры).  $\text{diam } V_i \leq e^{-n}$  при всех  $i \geq 1$  (множество  $V_0$  «особое», оно не входит в эту оценку).

Свойство MP2 (мера остатка).  $\nu(V_0) \leq Ne^{-n}$ .

Свойство MP3 (марковская аппроксимация). Для любых целых  $k > l > 1$  и  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$ , а также индексов  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , принимающих значения от 1 до  $I = I(n, N)$ , выполнено

$$(4.1) \quad \nu(T^{i_1}V_{j_1} \cap T^{i_2}V_{j_2} \cap \dots \cap T^{i_{l-1}}V_{j_{l-1}}/T^{i_l}V_{j_l} \cap \dots \\ \dots \cap T^{i_k}V_{j_k}) = \nu(T^{i_l}V_{j_l} \cap \dots \cap T^{i_{l-1}}V_{j_{l-1}}/T^{i_l}V_{j_l}) (1 + \Delta),$$

где  $|\Delta| \leq C_5 \alpha_0^n$  для некоторого  $C_5 = C_5(\alpha_0)$  (величина  $\alpha_0$  была введена в п.3.2).

Соотношение (4.1) означает марковость с точностью до множителя  $1 + \Delta$ . Легко показать, что соотношение (4.1) выполнено также при  $N \geq i_1 > i_2 > \dots > i_k \geq 1$ .

Для удобства обозначим  $\mathcal{J}$  множество индексов  $\{0, 1, \dots, I\}$ , где  $I = I(n, N)$ . Для любого  $k \geq 1$  и  $i \in \mathcal{J}$  выделим подмножество  $R_i(k) \subset \mathcal{J}$  такое, что  $j \in R_i(k)$  тогда и только тогда, когда

$$(4.2) \quad \nu(T^k V_i \cap V_j) \geq \beta_0 \nu(V_i) \nu(V_j),$$

где  $\beta_0 = \beta_0(Q) > 0$ . Кроме того, при  $k \geq 1$  определим подмножество  $R(k) \subset \mathcal{J}$  такое, что  $i \in R(k)$  тогда и только тогда, когда

$$(4.3) \quad \sum_{j \in R_i(k)} \nu(V_j) > 1 - e^{-n}.$$

Свойство MP4 (регулярность). Для каждого  $k \geq D_0 n$

$$(4.4) \quad \sum_{i \in R(k)} \nu(V_i) > 1 - Ne^{-n},$$

где  $D_0 = D_0(Q) > 0$ .

Постоянные  $\beta_0$  и  $D_0$  определяются в п. 4.3, но их численные значения не играют роли в дальнейшем.

Общий смысл соотношений (4.3) и (4.4) состоит в том, что неравенство (4.2), гарантирующее определенную степень перемешивания за  $k$  шагов, выполнено для «подавляющего большинства» пар индексов  $i, j$ . Это неравенст-

во позволит нам ниже, в теореме 4.1 доказать аналог условия сильного перемешивания в смысле Ибрагимова [9]. Построение марковского решета будет проведено в п. п. 4.2—4.4.

**Т е о р е м а 4.1** (с х о д и м о с т ь к р а в н о в е с и ю). Пусть  $k > l \geq 1$  — целые и  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$ . Тогда в множестве  $\mathcal{Y}^{k-l}$  найдется подмножество  $R_* = R_*(i_1, \dots, i_k)$  наборов из  $(k-l)$  индексов такое, что:

а) если  $(j_{l+1}, \dots, j_k) \in R_*$ , то

$$(4.5) \quad \sum_{j_1, \dots, j_l=0}^I |v(T^{i_1}V_{j_1} \cap \dots \cap T^{i_l}V_{j_l}/T^{i_{l+1}}V_{j_{l+1}} \cap \dots \cap T^{i_k}V_{j_k}) - v(T^{i_1}V_{j_1} \cap \dots \cap T^{i_l}V_{j_l})| \leq \Delta;$$

б) имеет место оценка

$$(4.6) \quad \sum_{(j_{l+1}, \dots, j_k) \in R_*} v(T^{i_{l+1}}V_{j_{l+1}} \cap \dots \cap T^{i_k}V_{j_k}) \geq 1 - \Delta,$$

где в качестве  $\Delta$  можно взять  $\Delta = \max \{N^2 e^{-n/2}, CN\alpha_0^n, (1 - \beta_0)^{\lfloor L/2 \rfloor}\}$  при  $L = \lfloor (i_{l+1} - i_l)/(D_0 n) \rfloor$ .

**З а м е ч а н и е 4.2.** Легко проверить, что утверждение теоремы равным образом справедливо при  $N \geq i_1 > i_2 > \dots > i_k \geq 1$ .

Часть (а) теоремы 4.1 означает, что условные распределения на множествах  $T^{i_1}V_{j_1} \cap \dots \cap T^{i_l}V_{j_l}$  достаточно быстро сходятся к безусловным (а точнее, экспоненциально быстро с ростом длины промежутка времени  $|i_{l+1} - i_l|$  между «прошлым» и «будущим», правда, пока этот промежуток не станет величиной порядка  $n^2$ ). Эта сходимость имеет место для «подавляющего большинства» возможных условий  $T^{i_{l+1}}V_{j_{l+1}} \cap \dots \cap T^{i_k}V_{j_k}$  в силу части (б) теоремы 4.1.

Доказательством теоремы 4.1 мы завершим п. 4.1. Оно использует довольно стандартные для теории марковских цепей приемы, поэтому в ряде мест мы опускаем детали. Во-первых, из свойства МР2 следует, что наборами индексов  $(j_1, \dots, j_k)$ , содержащими хотя бы один нуль, можно пренебречь — они не влияют на справедливость неравенств (4.5) и (4.6). К оставшимся наборам индексов (без нулей) в силу свойства МР3 применима марковская аппроксимация. Свойство МР3 позволяет сразу же свести теорему 4.1 к случаю  $k = l + 1$ , т. е. когда в условии в формуле (4.5) стоит ровно одно множество  $T^{i_{l+1}}V_{j_{l+1}}$ . Несколько сложнее свести теорему к случаю  $l = 1$ , но и это можно сделать, последовательно избавляясь от индексов  $j_1, j_2, \dots, j_{l-1}$  в (4.5). Укажем лишь первый шаг в этой процедуре:

$$\begin{aligned} & v(T^{i_1}V_{j_1} \cap \dots \cap T^{i_l}V_{j_l}/T^{i_{l+1}}V_{j_{l+1}}) - v(T^{i_1}V_{j_1} \cap \dots \cap T^{i_l}V_{j_l}) = \\ & = v(T^{i_1}V_{j_1}/T^{i_2}V_{j_2} \cap \dots \cap T^{i_{l+1}}V_{j_{l+1}}) \cdot v(T^{i_2}V_{j_2} \cap \dots \cap T^{i_l}V_{j_l}/T^{i_{l+1}}V_{j_{l+1}}) - \\ & \quad - v(T^{i_1}V_{j_1}/T^{i_2}V_{j_2} \cap \dots \cap T^{i_l}V_{j_l}) \cdot v(T^{i_2}V_{j_2} \cap \dots \cap T^{i_l}V_{j_l}). \end{aligned}$$

Далее, к двум условным мерам в правой части (с «длинными» условиями) применяется формула (4.1) и затем производится суммирование по  $j_1$ .

Осталось доказать теорему 4.1 при  $l = 1$  и  $k = 2$ . Можно предположить, что  $L \geq 2$ , иначе теорема тривиальна, так как множество  $R_*$  можно выбрать пустым. Для удобства обозначим  $t_0 = i_1, t_L = i_2 (= i_k)$  и выберем произвольные  $t_1 < t_2 < \dots < t_{L-1}$  такие, что  $t_0 < t_1, t_{L-1} < t_L$  и  $\min \{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_L - t_{L-1}\} \geq D_0 n$  (т. е. зафиксируем  $L - 1$  промежуточных моментов времени на отрезке  $[t_0, t_L]$ , попарные расстояния между кото-

рыми  $\geq D_0 n$ ). После этого можно записать

$$(4.7) \quad v(T^{t_0} V_{j_0} / T^{t_0} V_{j_L}) = \sum_{j_1, \dots, j_{L-1}=0}^I v(T^{t_{L-1}} V_{j_{L-1}} / T^{t_{L-1}} V_{j_L}) \times \\ \times v(T^{t_{L-2}} V_{j_{L-2}} / T^{t_{L-2}} V_{j_{L-1}} \cap T^{t_{L-2}} V_{j_L}) \times \dots \times v(T^{t_0} V_{j_0} / T^{t_0} V_{j_1} \cap \dots \cap T^{t_0} V_{j_L}).$$

Легко показать, что наборы  $j_1, \dots, j_{L-1}$ , содержащие хотя бы один нуль, дают вклад в общую сумму в (4.7), не превышающий  $e^{-n/2}$ . К остальным наборам применима марковская аппроксимация (свойство МРЗ), после чего (4.7) сводится к следующей сумме:

$$(4.8) \quad \sum_{j_1, \dots, j_{L-1}=0}^I \prod_{l=1}^L v(T^{t_{l-1}} V_{j_{l-1}} / T^{t_{l-1}} V_{j_l}).$$

Для удобства введем новые, «вероятностные» обозначения. Положим  $\pi_{ij}^{(l)} = v(T^{t_{l-1}} V_j / T^{t_{l-1}} V_i)$  при  $1 \leq l \leq L$  и  $0 \leq i, j \leq I$ . Тогда матрицы  $\Pi^{(l)} = \|\pi_{ij}^{(l)}\|$  стохастические при любых  $l$  и имеют общий стационарный вектор  $P = \|p_i\|$ ,  $p_i = v(V_i)$ . Обозначим произведение матриц  $\Pi^{(1)} \cdot \Pi^{(2)} \cdot \dots \cdot \Pi^{(l)}$  через  $\Pi^{(1, l)} = \|\pi_{ij}^{(1, l)}\|$  при  $1 \leq l \leq L$ . Пусть также  $P_i^{(1, l)}$  означает  $i$ -ю строку матрицы  $\Pi^{(1, l)}$ . Тогда сумма (4.8) есть не что иное, как  $\pi_{j_0 j_L}^{(1, L)}$  — элемент матрицы  $\Pi^{(1, L)}$ . Поэтому требуемое неравенство (4.5) (при  $l = 1, k = 2$ ) можно записать в форме:

$$(4.9) \quad \sum_{j=0}^I |\pi_{ij}^{(1, L)} - p_j| = 2 \text{Var}(P_i^{(1, L)}, P) \leq \Delta,$$

где  $\text{Var}(\cdot, \cdot)$  — расстояние по вариации между двумя вероятностными векторами. Малость левой части (4.9) означает быструю сходимость к равновесию в нестационарной марковской цепи с матрицами перехода  $\Pi^{(l)}$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$ . Следующая техническая лемма является первым шагом в доказательстве (4.9).

**Л е м м а 4.3.** Для любых  $l = 1, 2, \dots, L$  и  $i \in \mathcal{J}$  имеем

$$\text{Var}(P_i^{(1, l)}, P) \leq (1 - \beta_0) \text{Var}(P_i^{(1, l-1)}, P) + \Delta',$$

где

$$\Delta' = 6 \left( \sum_{j \in R(t_l - t_{l-1})} \pi_{ij}^{(1, l-1)} + e^{-n} \right).$$

Напомним, что  $R(\cdot)$  означает подмножество в  $\mathcal{J}$ , введенное в МР4.

**Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы.** Обозначим для краткости  $\tau_l = t_l - t_{l-1}$ . Во-первых, заметим, что в силу свойства МР4 при всех  $i \in R(\tau_l)$

$$(4.10) \quad \sum_{j \in R(\tau_l)} \pi_{ij}^{(l)} \geq 1 - \beta_0 e^{-n}.$$

Далее, легко показать, что

$$(4.11) \quad \text{Var}(P_i^{(1, l)}, P) = \sum_j^+ \sum_{k \in R(\tau_l)} (\pi_{ik}^{(1, l-1)} - p_k) (\pi_{kj}^{(l)} - \beta_0 p_j) + \\ + \beta_0 \sum_j^+ \sum_{k \in R(\tau_l)} (\pi_{ik}^{(1, l-1)} - p_k) p_j + \sum_j^+ \sum_{k \notin R(\tau_l)} (\pi_{ik}^{(1, l-1)} - p_k) \pi_{kj}^{(l)},$$

где  $\sum_j^+$  означает сумму по таким  $j \in \mathcal{J}$ , что  $\pi_{ij}^{(1, l)} > p_j$ . Легко проверить, что второе и третье слагаемые в (4.11) не превосходят величины  $\Delta'/6$  из форму-

лировки леммы. Первое слагаемое мажорируется суммой

$$(4.12) \quad \sum_{k \in R(\tau_l)}^+ \sum_{j \in R_k(\tau_l)} (\pi_{ik}^{(1, l-1)} - p_k) (\pi_{kj}^{(l)} - \beta_0 p_j) + \\ + \sum_{k \in R(\tau_l)}^- \sum_{j \notin R_k(\tau_l)} (\pi_{ik}^{(1, l-1)} - p_k) (\pi_{kj}^{(l)} - \beta_0 p_j),$$

где  $\sum^+$  и  $\sum^-$  означают суммы по таким  $k$ , для которых  $\pi_{ik}^{(1, l-1)} > p_k$  и наоборот, соответственно. В силу (4.10) второе слагаемое в (4.12) не превосходит  $\beta_0 e^{-n}$ . Вновь используя (4.10), легко показать, что первое слагаемое в (4.12) не превосходит  $(1 - \beta_0) \text{Var}(P_i^{(1, l)}, P) + \Delta'/6$ . Лемма доказана.

Применяя лемму 4.3 последовательно  $L$  раз при фиксированном  $i$ , получим оценку

$$(4.13) \quad \text{Var}(P_i^{(1, L)}, P) \leq (1 - \beta_0)^L + 6 \sum_{l=1}^L \sum_{j \notin R(\tau_l)} \pi_{ij}^{(1, l-1)} + 6Le^{-n}$$

(здесь  $\pi_{ij}^{(1, 0)}$  означают элементы единичной матрицы размера  $I \times I$ ).

Вид второго члена в правой части (4.13) дает возможность определить множество  $R_*$  в теореме 4.1 следующим образом. Для каждого  $l = 1, 2, \dots, L$  выделим подмножество  $R_*(l) \subset \mathcal{I}$  таких  $i$ , что

$$(4.14) \quad \sum_{j \notin R(\tau_l)} \pi_{ij}^{(1, l-1)} \leq e^{-n/2}$$

и положим  $R_* = R_*(1) \cap R_*(2) \cap \dots \cap R_*(L)$ . Тогда, если  $i \in R_*$ , то в силу (4.13)  $\text{Var}(P_i^{(1, L)}, P) \leq \Delta/2$ , т. е. неравенство (4.9) (а, значит, и (4.5)) доказано. Наконец, используя (4.14), получаем

$$\sum_{i \notin R_*} p_i \leq e^{n/2} \sum_{l=1}^L \sum_{i \notin R_*(l)} \sum_{j \notin R(\tau_l)} p_i \pi_{ij}^{(1, l-1)} \leq e^{n/2} \sum_{l=1}^L \sum_{j \notin R(\tau_l)} p_j \leq LNe^{-n/2},$$

что доказывает (4.6) в случае  $k = l + 1$ .

Теорема 4.1 полностью доказана.

**4.2. Построение исходного решета.** Марковское решето строится в два шага. На первом мы превратим предмарковское разбиение, построенное в работе [8], в некоторую «решетчатую конструкцию», которая будет довольно грубым приближением к марковскому решету. Полученный объект мы назовем *исходным решетом*. На втором шаге, в п. 4.3 мы проведем две последовательные модификации исходного решета и в результате получим *марковское решето*. В п. 4.4 будет отдельно доказано свойство регулярности МР4.

Напомним основные свойства предмарковского разбиения для двумерных гиперболических бильярдов.

Пусть  $m \geq 0$  и  $m_1, m_2 \geq m$  — целые. *Предмарковским разбиением*  $\xi$  пространства  $M$  для отображения  $T^m$  называется покрытие этого пространства конечным или счетным числом криволинейных многоугольников (с  $C^1$ -гладкими сторонами), обладающее следующими свойствами:

1. Различные многоугольники могут пересекаться только по границе.
2. Стороны многоугольников  $U \in \xi$  лежат на кривых разрыва и на некоторых ЛНМ и ЛУМ. Соответственно, граница разбиения  $\partial \xi$  распадается на три части  $\partial \xi = \partial^R \xi \cup \partial^u \xi \cup \partial^s \xi$ , причем  $\partial^R \xi$  совпадает с  $R_{-m_1, m_2}$ , а  $\partial^u \xi$  ( $\partial^s \xi$ ), состоит из *конечного* числа ЛНМ (ЛУМ).
3.  $T^m(\partial^s \xi) \subseteq \partial^s \xi$  и  $T^{-m}(\partial^u \xi) \subseteq \partial^u \xi$ .
4. Любой отрезок ЛНМ (ЛУМ), входящий в  $\partial^u \xi$  ( $\partial^s \xi$ ), оканчивается либо на  $\partial^R \xi$ , либо *строго внутри* некоторого ЛУМ из  $\partial^s \xi$  (ЛНМ из  $\partial^u \xi$ ).

Собственно, свойство инвариантности границ (3) является характеристическим для предмарковского разбиения. Подчеркнем еще раз, что элементы предмарковского разбиения не являются параллелограммами.

В работе [8] разбиение  $\xi$  было построено для некоторого  $m \geq 1$  и  $m_1 = m_2 = m$ , причем величина  $m$  могла быть выбрана сколь угодно большой. Мы будем считать ее фиксированной. Кроме того, для каждого такого  $m$  предмарковское разбиение зависит от малого параметра  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(m)$ . В частности, диаметры всех элементов  $U \in \xi = \xi(\varepsilon)$  не превосходят  $\text{const}(Q) \sqrt{\varepsilon}$ .

В силу свойства 4 каждый элемент  $U \in \xi$ , не граничащий с  $\partial^R \xi$ , представляет собой четырехугольник. В силу свойства 2 таких элементов конечное число. Как и в [8], будем называть их *непримыкающими*, а остальные элементы — *примыкающими*. Мера объединения всех примыкающих элементов не превышает  $m \text{const}(Q) \varepsilon$ .

От разбиения  $\xi = \xi(\varepsilon)$  перейдем к разбиению  $\xi_1 = \bigvee_{-m}^m T^i \xi$ . Оно также обладает свойствами 1—4 при  $m_1 = m_2 = 2m$ , но при этом оно будет предмарковским для  $T$ , а не для  $T^m$ . Легко видеть, что мера объединения примыкающих элементов разбиения  $\xi_1$  не превосходит  $m^2 \text{const}(Q) \varepsilon$ .

Основной шаг в построении исходного решета состоит в том, что в каждом непримыкающем элементе  $U \in \xi_1$  мы проведем *все* ОЛНМ и *все* ОЛУМ, *натянутые на*  $U$ . В пересечении получим *параллелограмм*  $W(U)$ . Выделим среди них параллелограммы, удовлетворяющие трем дополнительным условиям:

(Д1) четырехугольник  $U$  и его образы  $T^i U$  при  $|i| \leq m$  не пересекают кривых дробления;

(Д2)  $\nu(W(U))/\nu(U) \geq 1 - \varepsilon^{b_1}$ ;

(Д3)  $p(\gamma_{W(U)}^u(x)) \geq \varepsilon^{b_2}$  и  $p(\gamma_{W(U)}^s(x)) \geq \varepsilon^{b_2}$  для каждой точки  $x \in W(U)$ .

Здесь и далее  $b_1, b_2, \dots$  означают положительные постоянные, определяемые выбором величин  $\nu$  и  $p_0$  в § 3. Значения этих постоянных будут подобраны ниже, а пока мы сохраним за собой свободу их выбора.

Определим исходное решето  $\mathcal{R}_\varepsilon$  как совокупность построенных выше параллелограммов  $W_1, W_2, \dots, W_I, I = I(\varepsilon)$ , удовлетворяющих условиям (Д1 — Д3), и обозначим  $W_0 = M \setminus \bigcup W_i$ . Для каждого  $W \in \mathcal{R}_\varepsilon$  обозначим  $\tilde{K}(W)$  элемент разбиения  $\xi_1$ , из которого был получен параллелограмм  $W$ .

**Л е м м а 4.4.** *Исходное решето  $\mathcal{R}_\varepsilon$  обладает следующими свойствами:*

а) (с т р у к т у р а) *параллелограммы  $W \in \mathcal{R}_\varepsilon$  0-однородны и образуют пересечением всех ОЛНМ и всех ОЛУМ, натянутых на  $\tilde{K}(W)$ , четырехугольники  $\tilde{K}(W)$  могут пересекаться друг с другом только по своей границе;*

б) (мера остатка)  $\nu(W_0) < \varepsilon^{b_2}$ ;

в) (марковость за один шаг) *для любых двух параллелограммов  $W', W'' \in \mathcal{R}_\varepsilon$  пересечения  $TW' \cap W''$  и  $T\tilde{K}(W') \cap \tilde{K}(W'')$  либо имеют меру 0, либо правильные (пояснения см. ниже);*

г) (плотность) *для каждого  $W \in \mathcal{R}_\varepsilon$  найдутся натянутые на  $\tilde{K}(W)$  ОЛНМ  $\tilde{\gamma}^u(W)$  и ОЛУМ  $\tilde{\gamma}^s(W)$ , на которых  $W$  имеет плотность не меньше, чем  $1 - \tilde{\delta}_1(\varepsilon)$ , где  $\tilde{\delta}_1(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;*

д) (размеры) *для каждого  $W \in \mathcal{R}_\varepsilon$  имеем  $\text{diam } W \leq \text{const}(Q) \sqrt{\varepsilon}$ , но  $p(\tilde{\gamma}^u(W)) \geq \varepsilon^{b_2}$  и  $p(\tilde{\gamma}^s(W)) > \varepsilon^{b_2}$ .*

Напомним [8], что если  $W', W''$  — два параллелограмма, то пересечение  $TW' \cap W''$  называется *правильным*, если оно не пусто и представляется в виде  $\{\gamma_{W''}^u(x), T\gamma_{W'}^s(T^{-1}x)\}$  для любой точки  $x \in TW' \cap W''$ . Аналогично,

пересечение  $T\tilde{K}(W') \cap \tilde{K}(W'')$  мы называем *правильным*, если оно представляет собой непустой четырехугольник с  $s$ -границами на  $\partial\tilde{K}(W'')$ , а  $\tilde{K}(W') \cap T^{-1}\tilde{K}(W'')$  — четырехугольник с  $u$ -границами на  $\partial\tilde{K}(W')$ . Правильность пересечений характеризует элементы марковского разбиения [8], поэтому свойство (в) мы назвали *марковостью*.

Заметим, что из свойства (в) *не следует* правильность пересечения  $T^n W' \cap W''$  при  $n \geq 2$ , так как оно может содержать точки  $x$  такие, что  $T^{-k}x \in W_0$  при некотором  $1 \leq k \leq n - 1$ .

**Доказательство леммы.** Свойства (а), (в), (г) и (д) немедленно следуют из построения. Отметим лишь, что свойство (г) следует из (Д2) и из абсолютной непрерывности слоев ЛНМ и ЛУМ. Отметим также, что четырехугольник  $\tilde{K}(W)$  не всегда совпадает с носителем параллелограмма  $W$ , так как стороны элемента  $\tilde{K}(W) \in \xi_1$  могут быть *неоднородными* ЛНМ (ЛУМ).

Осталось доказать свойство (б). Множество  $W_0$  является объединением всех примыкающих элементов  $U \in \xi_1$ , всех непримыкающих элементов  $U \in \xi_1$ , которые не удовлетворяют (Д1) — (Д3), и всех дополнений  $U \setminus W(U)$  в тех элементах, которые удовлетворяют (Д1) — (Д3). Оценка суммарной меры примыкающих элементов приведена выше. Дополнения  $U \setminus W(U)$  имеют суммарную меру меньше  $\varepsilon^{b_1}$  в силу (Д2).

Рассмотрим элементы  $U \in \xi_1$ , не удовлетворяющие условию (Д1). Из малости диаметров этих элементов и из построения кривых дробления вытекает, что их суммарная мера не превышает  $2mC_6\varepsilon^{b_4}$ , где  $C_6 = C_6(v, n_0)$  и  $b_4 = b_4(v) > 0$ .

Перейдем к условию (Д2). По построению, точки  $x \in U \setminus W(U)$  имеют короткие ОЛНМ или ОЛУМ, т. е.  $\min\{r^{ou}(x), r^{os}(x)\} \leq \text{const} \sqrt{\varepsilon}$ . В силу теоремы 3.10 суммарная мера элементов, не удовлетворяющих (Д2), не превосходит  $\text{const}(Q) \varepsilon^{\theta/2 - b_1}$ , и нам достаточно будет положить  $b_1 = \theta/4$ .

Наибольшую трудность представляет (Д3). Достаточно рассмотреть элементы  $U \in \xi_1$ , не удовлетворяющие (Д3), но удовлетворяющие (Д2). Сперва мы оценим меру каждого из них. Пусть  $x \in W(U)$  — такая точка, что  $p(\gamma_{W(U)}^u(x)) \leq \varepsilon^{b_2}$  (другой случай, когда  $p(\gamma_{W(U)}^s(x)) \leq \varepsilon^{b_2}$ , совершенно аналогичен). Учитывая 0-однородность  $W(U)$ , получаем  $p(\gamma_{W(U)}^u(y)) \leq \leq C_4^{-1}\varepsilon^{b_2}$  для любой точки  $y \in W(U)$ , откуда (см. (2.3))  $l(\gamma_{W(U)}^u(y)) \leq \leq \text{const}(Q) \varepsilon^{b_2/2}$  и поэтому (см. п. 3.1)

$$(4.15) \quad v(W(U)) \leq \text{const}(Q, v, n_0) \varepsilon^{b_2/2}.$$

Далее мы оценим число  $N_\varepsilon$  всех непримыкающих элементов  $U \in \xi_1$ . Наша идея состоит в том, что их размеры имеют порядок  $\varepsilon$ , а  $\dim M = 2$ , поэтому их число  $N_\varepsilon$  должно расти как  $\varepsilon^{-2}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для наших целей хватит любой степенной оценки  $N_\varepsilon < \varepsilon^{-b_5}$ ,  $b_5 > 0$ .

Для вывода этой оценки нам придется совершить экскурс в построение предмарковского разбиения  $\xi$  (см. [8], §§ 3, 4, 6). Рассмотрим рассеивающий бильярд с конечным горизонтом. Построение  $\xi$  начиналось с выбора двух  $(C_0\varepsilon)$ -сетей в некоторых подмножествах пространства  $M$ . Если эти сети выбирать минимальными, то число их элементов не превысит  $\text{const}(Q) \varepsilon^{-2}$ . Предположение о минимальности сетей не влияет на построение  $\xi$ , поэтому мы можем сделать его здесь.

Для каждой точки данных сетей было построено 7 отрезков ЛНМ и ЛУМ определенного вида, после чего к ним были добавлены их образы под действием  $T^{\pm m}$ . При малых  $\varepsilon$  каждый из первоначальных отрезков пересекает не более  $mK_0$  кривых разрыва из  $R_{-m}$ ,  $m$ . Поэтому общее число всех построен-

ных отрезков не превышает  $mc'(Q)\varepsilon^{-2}$ . Именно они составляют границу  $\partial^u \xi$  и  $\partial^s \xi$ . В границу  $\partial \xi_1$  входят эти же отрезки и их образы под действием  $T^i$ ,  $|i| \leq m$ . В силу аналогичных соображений их число не превосходит  $m^2 c''(Q)\varepsilon^{-2}$ . Наконец, общее число непримыкающих элементов  $U \in \xi_1$  не превосходит  $m^8 c'''(Q)\varepsilon^{-8}$ , так как каждый из них однозначно определяется четверкой ограничивающих его отрезков ЛНМ и ЛУМ.

Несколько сложнее дело обстоит в случае бильярдов с бесконечным горизонтом (см. [8, § 4]) или с фокусирующими компонентами границы (см. [8, § 6]). Детальный разбор этих ситуаций мы опускаем, он основан на тех же соображениях. Во всех случаях получаем оценку  $N_\varepsilon \leq \varepsilon^{-b_5}$ ,  $b_5 > 0$ .

Последняя оценка вместе с (4.15) показывает, что суммарная мера элементов  $U \in \xi_1$ , не удовлетворяющих (ДЗ), но удовлетворяющих (Д2), не превосходит  $\varepsilon^{b_2/2 - b_5}$ , и нам достаточно положить  $b_2 = 2(b_5 + 1)$  и, наконец,  $b_3 = \min\{b_4, b_1, 1\}$ .

Лемма 4.4 доказана.

**4.3. Переход от исходного решета к марковскому.** Здесь мы проведем две последовательные модификации исходного решета  $\mathcal{R}_\varepsilon$ , результатом чего будет марковское решето  $\mathcal{R}_{\varepsilon, n}$ .

**Первая модификация** состоит в измельчении элементов  $W \in \mathcal{R}_\varepsilon$ , чтобы в результате получить  $n$ -однородные параллелограммы.

Рассмотрим всевозможные пересечения

$$(4.16) \quad T^{-n}W_{i-n} \cap \dots \cap T^{-1}W_{i-1} \cap W_i \cap TW_i \cap \dots \cap T^n W_{i+n},$$

имеющие ненулевую меру (здесь  $W_i \in \mathcal{R}_\varepsilon$ ). Обозначим их  $\tilde{V}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, I(\varepsilon, n)$ , и  $\tilde{V}_0 = \bar{M} \setminus \bigcup_i \tilde{V}_i$ . Набор  $\{\tilde{V}_i\}$ ,  $1 \leq i \leq I(\varepsilon, n)$ , обозначим  $\mathcal{R}_{\varepsilon, n}$  и назовем *предмарковским решетом* (с параметрами  $\varepsilon, n$ ). Для элемента  $\tilde{V} \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n}$ , задаваемого формулой (4.16), обозначим  $\tilde{K}(\tilde{V}) = T^{-n}\tilde{K}(W_{i-n}) \cap \dots \cap T^n\tilde{K}(W_{i+n})$ , а также  $\tilde{\gamma}^u(\tilde{V}) = T^{-n}\tilde{\gamma}^u(W_{i-n})$  и  $\tilde{\gamma}^s(\tilde{V}) = T^n\tilde{\gamma}^s(W_{i+n})$ . В силу леммы 4.4, элементы  $\tilde{V} \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n}$  являются параллелограммами, а  $\tilde{K}(\tilde{V})$  — четырехугольниками.

**Лемма 4.5.** *Предмарковское решето  $\tilde{V} \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n}$  обладает следующими свойствами:*

а) (структура) параллелограммы  $\tilde{V} \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n}$   $n$ -однородны, а четырехугольники  $\tilde{K}(\tilde{V})$  могут пересекаться друг с другом только по своей границе;

б) (мера остатка)  $\nu(\tilde{V}_0) \leq 3n\varepsilon^{b_5}$ ;

в) (марковость за  $\pm n$  шагов) для любых двух параллелограммов  $\tilde{V}', \tilde{V}'' \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n}$  и любого  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , пересечения  $T^k\tilde{V}' \cap \tilde{V}''$  и  $T^k\tilde{K}(\tilde{V}') \cap \tilde{K}(\tilde{V}'')$  либо имеют меру 0, либо правильные;

г) (плотность) каноническая проекция любого параллелограмма  $\tilde{V} \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n}$  на ОЛНМ  $\tilde{\gamma}^u(\tilde{V})$  (ОЛУМ  $\tilde{\gamma}^s(\tilde{V})$ ) имеет плотность на этом ОЛНМ (ОЛУМ) не ниже  $1 - \tilde{\delta}_2(\varepsilon)$ , где  $\tilde{\delta}_2(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

д) (размеры) для каждого  $\tilde{V} \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n}$  имеем  $\text{diam } \tilde{V} \leq \text{const } \sqrt{\varepsilon}$ , но  $p(T^n\tilde{\gamma}^u(\tilde{V})) \geq \varepsilon^{b_2}$  и  $p(T^{-n}\tilde{\gamma}^s(\tilde{V})) \geq \varepsilon^{b_2}$ .

Лемма 4.5 немедленно следует из леммы 4.4.

**Вторая модификация** преследует своей целью обеспечить марковость за  $\pm N$  шагов.

Для каждого  $\tilde{V}_i \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n}$  определим подпараллелограмм  $V_i = \{x \in \tilde{V}_i: T^k x \notin \tilde{V}_0 \text{ при всех } |k| \leq N\}$  (т. е. удалим из  $\tilde{V}_i$  все точки, которые за  $\pm N$  шагов хотя бы раз «выскакивают» из предмарковского решета  $\mathcal{R}_{\varepsilon, n}$ ). Далее будем рассматривать только такие параллелограммы  $V_i \subset \tilde{V}_i$ , для которых

выполнено

$$(4.17) \quad \nu(V_i) > (1 - \varepsilon^{b_6}) \nu(\tilde{V}_i)$$

при  $b_6 = b_3/2$ .

Для удобства перенумеруем все параллелограммы  $V_i \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n}$  так, чтобы (4.17) было выполнено при  $i = 1, 2, \dots, I(\varepsilon, n, N)$  (естественно,  $I(\varepsilon, n, N) \leq I(\varepsilon, n)$ ). Обозначим  $\mathcal{R}_{\varepsilon, n, N}$  совокупность параллелограммов  $V_i$  при  $1 \leq i \leq I(\varepsilon, n, N)$  и  $V_0 = \bar{M} \setminus \bigcup_i V_i$ .

**Л е м м а 4.6.** Система множеств  $\mathcal{R}_{\varepsilon, n, N}$  обладает следующими свойствами:

- а) (структура) параллелограммы  $V \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n, N}$   $n$ -однородны;
- б) (мера остатка)  $\nu(V_0) \leq Nn\varepsilon^{b_6}$ ;
- в) (марковость за  $\pm N$  шагов) для любых двух параллелограммов  $V', V'' \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n, N}$  и любого  $k, 1 \leq k \leq N$ , пересечение  $T^k V' \cap V''$  либо имеет меру 0, либо правильное;
- г) (размеры)  $\text{diam } V < \text{const } \sqrt{\varepsilon}$  для каждого  $V \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n, N}$ .

Лемма 4.6 следует непосредственно из леммы 4.5.

Определим марковское решето  $\mathcal{R}_{n, N}$  как систему  $\mathcal{R}_{\varepsilon, n, N}$  при  $\varepsilon^{b_7} = e^{-n}$ , где  $b_7 = \min\{b_2, b_3, b_6\}/2$ , к которой добавлено одно множество  $V_0$ .

Свойства МР1 и МР2 марковского решета немедленно вытекают из леммы 4.6. Для доказательства свойства МР3 достаточно заметить, что параллелограмм  $T^{-i-i-1}V_{j_1} \cap \dots \cap T^{i-2-i-1}V_{j_{i-2}}$  (см. (4.1))  $s$ -вписан в  $V_{j_{i-1}}$ , а параллелограмм  $T^{i-i-1}V_{j_i} \cap \dots \cap T^{i-k-i-1}V_{j_k}$   $u$ -вписан в  $V_{j_{i-1}}$  и далее применить оценку (3.7). Доказательству свойства регулярности МР4 посвящен следующий раздел.

**4.4. Доказательство свойства регулярности.** Мы начнем со следующей леммы:

**Л е м м а 4.7** (о пересечении). Для всех  $V', V'' \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n}$  и для всех целых  $k \geq k_0 = D_1(n - \ln \varepsilon)$  выполнено  $\nu(T^k V' \cap V'') \geq \beta_1 \nu(V') \nu(V'')$ . Здесь  $\beta_1 > 0$  и  $D_1 > 0$  — постоянные, определяемые выбором величин  $\nu$  и  $n_0$  в § 3.

Подчеркнем, что здесь речь идет об элементах предмарковского (а не марковского) решета. Заметим также, что случай  $V' = V''$  не исключается.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Зафиксируем некоторый 0-однородный параллелограмм  $U_0$  ненулевой меры и в нем подпараллелограмм  $U_{00} \subset U_0$  также ненулевой меры,  $u$ - и  $s$ -границы которого лежат строго внутри носителя  $K(U_0)$ . Для каждого  $k \geq 1$  обозначим  $\tilde{\gamma}_{i, k}, i \geq 1$ , все отрезки внутри ОЛНМ  $\tilde{\gamma}^u(V')$ , образы которых под действием  $T^k$  натянута на параллелограмм  $U_0$  и, кроме того, пересекаются с  $s$ -границами внутреннего параллелограмма  $U_{00}$ . В силу леммы 4.5 (д) и теоремы 3.19

$$(4.18) \quad P(\bigcup_i \tilde{\gamma}_{i, k})/P(\tilde{\gamma}(V')) \geq C_4^{-1} \delta_1(U_0)$$

при всех  $k \geq k_1 = n - [C^{(1)}b_2 \ln \varepsilon] + n_1(U_0)$ .

Для каждого отрезка  $\tilde{\gamma}_{i, k}$  выделим подпараллелограмм  $\tilde{V}'_{i, k} \subset \tilde{V}'$ , канонически проектирующийся на этот отрезок. Далее будем рассматривать только такие  $i$ , для которых проекция параллелограмма  $\tilde{V}'_{i, k}$  на отрезок  $\tilde{\gamma}_{i, k}$  имеет на нем плотность не меньше  $1 - \tilde{\delta}_3$ , где  $\tilde{\delta}_3 = \tilde{\delta}_2^{1/2}$ . В силу (4.18) и леммы 4.5 (г) относительная мера объединения таких отрезков на кривой

$\tilde{V}''$  ( $\tilde{V}'$ ) при достаточно малых  $\varepsilon$  не меньше  $\delta_1(U_0)/2$ . Поэтому

$$(4.19) \quad v\left(\bigcup_i \tilde{V}'_{i,k}\right)/v(\tilde{V}') > \delta_2(U_0)$$

для некоторого  $\delta_2(U_0) > 0$ , если только  $\varepsilon$  достаточно мало.

Кроме того, в силу леммы 3.7 плотность канонической проекции параллелограммов  $T^k \tilde{V}'_{i,l}$  на натянутый на  $U_0$  ОЛНМ  $T^k \tilde{\gamma}'_{i,k}$  не меньше  $1 - C_4^{-1} \delta_3$ . Поэтому эти параллелограммы достаточно «вытянутые», т. е. их  $s$ -границы доходят почти до  $s$ -границ параллелограмма  $U_0$ , и в то же время их  $u$ -границы существенно отстоят от  $u$ -границ последнего, так как кривые  $T^k \tilde{\gamma}'_{i,k}$  пересекают  $s$ -границы  $U_{00}$ . Назовем это свойство *правильным положением*.

Рассмотрим параллелограмм  $\tilde{V}''$  из условия леммы 4.7. Совершенно аналогично построим параллелограммы  $\tilde{V}''_{j,l} \subset \tilde{V}''$  при  $l \leq -k_1$  (т. е. для отрицательных итераций отображения  $T$ ).

Исследуем пересечение параллелограммов  $U'_i = T^k \tilde{V}'_{i,k}$  и  $U''_j = T^l \tilde{V}''_{j,l}$ . В силу свойства «правильного положения» четырехугольники  $K(U'_i)$  и  $K(U''_j)$  пересекаются правильным образом, т. е. их пересечение ограничено  $u$ -границами  $K(U'_i)$  и  $s$ -границами  $K(U''_j)$ . Отсюда и из лемм 4.4. и 4.5 следует, что пересечение параллелограммов  $U'_i \cap U''_j$  также правильное, т. е. оно не пусто и представляется в виде  $[\gamma^u_{U'_j}(x), \gamma^s_{U'_i}(x)]$  для любой точки  $x \in U'_i \cap U''_j$ . Отметим, что это же утверждение было бы неверным, если бы мы использовали элементы *марковского* решета вместо *предмарковского*, так как тогда пересечение  $U'_i \cap U''_j$  могло быть пустым.

**З а м е ч а н и е 4.8.** Для каждой пары  $i, j$  параллелограмм  $W_{ij} = T^{-k}(U'_i \cap U''_j)$   $s$ -вписан в  $\tilde{V}'$  и параллелограмм  $T^{-l}(U'_i \cap U''_j)$   $u$ -вписан в  $\tilde{V}''$ , и, кроме того,  $T^{k-l}W_{ij} \subset \tilde{V}''$ . В частности, при  $\tilde{V}' = \tilde{V}''$  пересечение  $T^{k-l}W_{ij} \cap W_{ij}$  непустое и правильное. Эти свойства будут использоваться в § 7.

В силу 0-однородности  $U_0$  имеем  $v(U'_i \cap U''_j) \geq \delta_3 v(U'_i) v(U''_j)$ , где  $\delta_3 = \delta_3(U_0) > 0$ . Суммируя по всем  $i$  и  $j$  и далее применяя (4.19) (а также аналогичную оценку для параллелограммов  $\tilde{V}''_{j,l}$ ), получаем  $v(T^k \tilde{V}' \cap T^l \tilde{V}'') \geq \beta_1 v(\tilde{V}') v(\tilde{V}'')$  при  $\beta_1 = \delta_3 \delta_2^2$ . В силу произвольности  $k \geq k_1$  и  $l \leq -k_1$  получаем лемму 4.7 при  $k_0 = 2k_1$ .

Нам осталось вывести свойство регулярности (MP4). Оно следует из лемм 4.7, 4.5 (б) и соотношения (4.17), если положить  $\beta_0 = \beta_1/2$  и  $D_0 = 3(1 + 2C^{(u)}b_2/b_7)$ .

## § 5. Оценка убывания корреляций

Здесь мы выводим теорему 1.1, используя построения §§ 3—4. Выберем достаточно большое  $N$ , положим  $n = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$  и рассмотрим марковское решето  $\mathcal{R}_{n,N}$ . Усреднив функцию  $F(x)$  из условия теоремы 1.1 на элементах разбиения  $\mathcal{R}_{n,N}$ , получим некоторую ступенчатую функцию  $\tilde{F}(x)$ , порождающую новый стационарный процесс  $\tilde{X}_k = \tilde{F}(T^k x)$ .

Используя свойства MP1, MP2 и гёльдеровость функции  $F$ , легко доказать оценку

$$(5.1) \quad |\langle X_0 \cdot X_N \rangle - \langle \tilde{X}_0 \cdot \tilde{X}_N \rangle| \leq C_1(F) \gamma_1^n$$

для некоторого  $\gamma_1(\alpha) < 1$ , зависящего только от показателя  $\alpha$  в условии Гёльдера, причем  $\gamma_1(\alpha) \rightarrow 1$  при  $\alpha \rightarrow 0$  (здесь используется то, что  $\sup |F(x)| < \infty$  в силу компактности пространства  $\bar{M}$ ).

Обозначим  $f_i$  значение функции  $F(x)$  на элементе  $V_i \in \mathcal{R}_{n,N}$ . Имеем

$$\langle \bar{X}_0 \cdot \bar{X}_N \rangle = \sum_{i,j=0}^I f_i f_j \nu(V_i \cap T^N V_j) = \sum_{i,j=0}^I f_i f_j \nu(V_i / T^N V_j) \nu(V_j).$$

Применяя теорему 4.1 и учитывая, что  $N \geq n^2$ , получаем

$$(5.2) \quad \langle \bar{X}_0 \cdot \bar{X}_N \rangle = \sum_{i,j=0}^I f_i f_j \nu(V_i) \nu(V_j) + O(\gamma_1^n)$$

для некоторого  $\gamma_2 < 1$ , не зависящего от  $F$ . Первое слагаемое в правой части (5.2) равно нулю, так как  $\langle F(x) \rangle = \langle \bar{F}(x) \rangle = 0$ . Оценки (5.1) и (5.2) приводят к теореме 1.1. Ограничение на показатель  $\alpha$  в условии Гёльдера для  $F$  следует выбрать таким, что  $\gamma_1(\alpha) \leq \gamma_2$ .

Доказательство обобщения теоремы 1.1 для двух различных функций  $F$  и  $G$  (неравенство (1.4)) проходит без изменений.

**З а м е ч а н и е 5.1.** Условие на функцию  $F$  (и  $G$  из (1.4)) можно слегка ослабить: считать ее «кусочно гёльдеровской», т. е. гёльдеровской (с показателем  $\alpha$ ) на конечном числе подобластей  $M_1, \dots, M_l$  в  $M$  с кусочно гладкой границей таких, что  $\bar{M} = \bigcup M_i$ . Доказательство теоремы 1.1 в этом случае требует лишь одного дополнения при выводе неравенства (5.1): элементы марковского решета, пересекающиеся с  $\bigcup \partial M_i$ , имеют суммарную меру  $\leq C(F) e^{-n}$ .

Последнее замечание позволяет в случае рассеивающих билиардов с конечным горизонтом оценивать убывание корреляций для функций вида  $F(x) = \Phi(T^{-m}x, \dots, x, Tx, \dots, T^m x)$ , где  $\Phi$  — гладкая функция нескольких переменных. Такие функции имеют разрывы только на множестве  $R_{-m,m}$ . Примером такой функции служит  $\tau(x)$ .

### § 6. Центральная предельная теорема

Наше доказательство теоремы 1.2, как и аналогичные доказательства в [9, 23], использует классический метод Бернштейна [3].

Отметим сразу же, что в силу теоремы 1.1 величина  $\sigma^2$  в (1.2) конечна, и, кроме того, если  $\sigma \neq 0$ , то  $DS_N = \langle S_N^2 \rangle = \sigma^2 N (1 + o(1))$ . Поэтому соотношение (1.3) эквивалентно следующему:

$$\nu \left\{ \frac{1}{\sqrt{DS_N}} S_N < z \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du$$

(собственно, именно это соотношение и называют *центральной предельной теоремой*, см. [9]).

**6.1. Оценка четвертого момента.** Мы начнем со следующей леммы:

**Л е м м а 6.1.**  $\langle S_N^4 \rangle \leq C(F) N^2$ .

Для доказательства запишем

$$(6.1) \quad \langle S_N^4 \rangle = \sum_{t_1, t_2, t_3, t_4=0}^N \langle X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3} X_{t_4} \rangle$$

и оценим величину  $\langle X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3} X_{t_4} \rangle$ , предполагая, что  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ .

Вначале выделим в (6.1) слагаемые, для которых  $|t_4 - t_1| \leq 3N^{1/3}$ . Их число не превышает  $10N^2$ , поэтому достаточно рассмотреть только остав-

шиеся. Они разбиваются на три группы:

а)  $|t_2 - t_1| \geq N^{1/3}$ . Положим  $n = \lfloor \sqrt{t_2 - t_1} \rfloor$  и рассмотрим марковское решето  $\mathcal{R}_{n, N}$ . Как и в § 5, заменим  $F(x)$  на  $\bar{F}(x)$  (тем самым,  $X_i$  на  $\bar{X}_i$ ), при этом

$$|\langle X_{t_1} X_{t_2} X_{t_3} X_{t_4} \rangle - \langle \bar{X}_{t_1} \bar{X}_{t_2} \bar{X}_{t_3} \bar{X}_{t_4} \rangle| \leq C(F) N e^{-n}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \langle \bar{X}_{t_1} \bar{X}_{t_2} \bar{X}_{t_3} \bar{X}_{t_4} \rangle &= \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^I f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} f_{i_4} \nu(T^{-t_1} V_{i_1} \cap T^{-t_2} V_{i_2} \cap T^{-t_3} V_{i_3} \cap T^{-t_4} V_{i_4}) = \\ &= \sum f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} f_{i_4} \nu(T^{-t_1} V_{i_1} / T^{-t_2} V_{i_2} \cap T^{-t_3} V_{i_3} \cap T^{-t_4} V_{i_4}) \nu(T^{-t_2} V_{i_2} \cap T^{-t_3} V_{i_3} \cap T^{-t_4} V_{i_4}). \end{aligned}$$

Используя теорему 4.1 (см. также замечание 4.2) и учитывая, что  $|t_2 - t_1| \geq n^2$ , получаем

$$(6.2) \quad \langle \bar{X}_{t_1} \bar{X}_{t_2} \bar{X}_{t_3} \bar{X}_{t_4} \rangle = \sum f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} f_{i_4} \nu(T^{-t_1} V_{i_1}) \times \\ \times \nu(T^{-t_2} V_{i_2} \cap T^{-t_3} V_{i_3} \cap T^{-t_4} V_{i_4}) + O(\gamma^n)$$

для некоторого  $\gamma \in (0, 1)$ , не зависящего от  $F$ . Но первое слагаемое в правой части (6.2) равно нулю, так как  $\langle F(x) \rangle = \langle \bar{F}(x) \rangle = 0$ , поэтому

$$|\langle \bar{X}_{t_1} \bar{X}_{t_2} \bar{X}_{t_3} \bar{X}_{t_4} \rangle| \leq C(F) \gamma^{V_{t_2-t_1}}.$$

б)  $|t_3 - t_2| \geq N^{1/3}$ . Положим  $n = \lfloor \sqrt{t_3 - t_2} \rfloor$  и рассмотрим марковское решето  $\mathcal{R}_{n, N}$ . Действуя, как и в предыдущем случае, запишем

$$\begin{aligned} \langle \bar{X}_{t_1} \bar{X}_{t_2} \bar{X}_{t_3} \bar{X}_{t_4} \rangle &= \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^I f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} f_{i_4} \nu(T^{-t_1} V_{i_1} \cap T^{-t_2} V_{i_2} / T^{-t_3} V_{i_3} \cap T^{-t_4} V_{i_4}) \times \\ &\quad \times \nu(T^{-t_3} V_{i_3} \cap T^{-t_4} V_{i_4}). \end{aligned}$$

Используя теорему 4.1 и учитывая, что  $|t_3 - t_2| \geq n^2$ , получаем

$$\langle \bar{X}_{t_1} \bar{X}_{t_2} \bar{X}_{t_3} \bar{X}_{t_4} \rangle = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^I f_{i_1} f_{i_2} f_{i_3} f_{i_4} \nu(T^{-t_1} V_{i_1} \cap T^{-t_2} V_{i_2}) \nu(T^{-t_3} V_{i_3} \cap T^{-t_4} V_{i_4}) + O(\gamma^n)$$

для некоторого  $\gamma \in (0, 1)$ . Последнее равенство можно записать в виде  $\langle \bar{X}_{t_1} \bar{X}_{t_2} \bar{X}_{t_3} \bar{X}_{t_4} \rangle = \langle \bar{X}_{t_1} \bar{X}_{t_2} \rangle \langle \bar{X}_{t_3} \bar{X}_{t_4} \rangle + O(\gamma^n)$  и, согласно теореме 1.1,

$$|\langle \bar{X}_{t_1} \bar{X}_{t_2} \bar{X}_{t_3} \bar{X}_{t_4} \rangle| \leq C(F) e^{-V_{t_2-t_1} - V_{t_3-t_2}} + O(\gamma^n).$$

в)  $|t_4 - t_3| \geq N^{1/3}$ . Этот случай рассматривается аналогично случаю а).

Суммируя полученные выше оценки, приходим к неравенству в формулировке леммы 6.1.

**З а м е ч а н и е.** Полученные оценки можно обобщить на моменты любых порядков. Рассмотрим величину  $\langle X_{t_1} \cdot X_{t_2} \cdot \dots \cdot X_{t_k} \rangle$  при  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$  и упорядочим разности  $t_2 - t_1, t_3 - t_2, \dots, t_k - t_{k-1}$ . Из этих  $k-1$  разностей выберем  $\lfloor (k+1)/2 \rfloor$ -ю (по возрастанию) и обозначим ее  $d$ . Тогда  $|\langle X_{t_1} X_{t_2} \dots X_{t_k} \rangle| \leq C(F, k) \gamma^d$  для некоторого  $\gamma < 1$ , не зависящего от  $F$  и  $k$ . Отсюда следует, что  $|\langle S_N^k \rangle| \leq C(F, k) N^{\lfloor k/2 \rfloor}$  для любого целого  $k \geq 1$ .

**6.2. Аппроксимация характеристической функции.** Основной прием в доказательстве предельных теорем (восходящий к С. Н. Бернштейну) состоит в разбиении всего отрезка времени  $\Delta = [1, N]$  на подотрезки

$$\Delta = \Delta'_1 \cup \Delta''_1 \cup \Delta'_2 \cup \Delta''_2 \cup \dots \cup \Delta'_k \cup \Delta''_k \cup \Delta_0,$$

где длины отрезков  $\Delta'_i$  равны  $L = [N^a]$ , длины отрезков  $\Delta''_i$  равны  $l = [N^b]$ , а длина «остатка»  $\Delta_0$  не превышает  $L + l$ . Выберем  $a$  и  $b$  таким образом, что  $1 > a > b > 0$ . Тогда более длинные отрезки  $\Delta'_i$  будут разделены относительно короткими  $\Delta''_i$ . Обозначим  $\Delta' = \Delta'_1 \cup \Delta'_2 \cup \dots \cup \Delta'_k$  и  $\Delta'' = \Delta''_1 \cup \Delta''_2 \cup \dots \cup \Delta''_k \cup \Delta_0$ . Разложим

$$S_N = \sum_{t \in \Delta'} X_t = \sum_{t \in \Delta'} X_t + \sum_{t \in \Delta''} X_t = S'_N + S''_N.$$

Число слагаемых в сумме  $S''_N$  не превышает  $2N^h$ , где  $h = \max\{a, 1 - a + b\} < 1$ . Поэтому, в силу теоремы 1.1,  $\mathcal{D}S''_N = \langle (S''_N)^2 \rangle \leq C(F) N^h$ . Используя неравенство Чебышева, получаем

$$\nu \left\{ x: \frac{1}{\sigma \sqrt{N}} S''_N > \varepsilon \right\} \leq \langle (S''_N)^2 \rangle / (\varepsilon^2 \sigma^2 N) \rightarrow 0$$

при  $N \rightarrow \infty$ , т. е. величина  $S''_N / \sqrt{\mathcal{D}S''_N}$  стремится к нулю по вероятности, и кроме того,  $\mathcal{D}S_N \sim \mathcal{D}S'_N$ . Поэтому (см., например, [9], лемма 18.4.1) предельные распределения величин  $S_N / \sqrt{\mathcal{D}S_N}$  и  $S'_N / \sqrt{\mathcal{D}S'_N}$  совпадают. Последнюю величину запишем в виде

$$(6.3) \quad \frac{S'_N}{\sqrt{\mathcal{D}S'_N}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}S'_N}} \left( \sum_{r=1}^k \sum_{t \in \Delta_r} X_t \right) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}S'_N}} \sum_{r=1}^k S_L^{(r)}.$$

Длины «разделяющих» отрезков  $\Delta_r$ ,  $1 \leq r \leq k$ , хотя и сравнительно невелики, но стремятся к бесконечности при  $N \rightarrow \infty$ , поэтому величины  $S_L^{(r)}$  в (6.3) при различных  $r$  должны быть слабо зависимы. Это позволит нам аппроксимировать характеристическую функцию величины (6.3), равную

$$\varphi(\lambda) = \left\langle \exp \left( \frac{i\lambda}{\sqrt{\mathcal{D}S'_N}} \sum_{r=1}^k S_L^{(r)} \right) \right\rangle,$$

более простым выражением

$$\varphi_0(\lambda) = \left[ \left\langle \exp \left( \frac{i\lambda}{\sqrt{k\mathcal{D}S_L^{(1)}}} S_L^{(1)} \right) \right\rangle \right]^k.$$

Для этой цели введем марковское решето  $\mathcal{R}_{n,N}$  при  $n = [N^{b/2}]$ . Заменяем функцию  $F(x)$  на ее усреднение  $\tilde{F}(x)$  на элементах разбиения  $\mathcal{R}_{n,N}$  и, соответственно, процесс  $\{X_t\}$  на  $\tilde{X}_t = \tilde{F}(T^t x)$ . Величины  $S_L^{(r)}$  в (6.3) заменяются соответственно на  $\tilde{S}_L^{(r)}$ . Рассмотрим функции

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \left\langle \exp \left( \frac{i\lambda}{\sqrt{\mathcal{D}\tilde{S}'_N}} \sum_{r=1}^k \tilde{S}_L^{(r)} \right) \right\rangle$$

и

$$\tilde{\varphi}_0(\lambda) = \left[ \left\langle \exp \frac{i\lambda}{\sqrt{k\mathcal{D}\tilde{S}_L^{(1)}}} \tilde{S}_L^{(1)} \right\rangle \right]^k.$$

Используя свойства MP1 и MP2 марковского решета, легко показать, что  $\varphi(\lambda) = \tilde{\varphi}(\lambda) + o(1)$  и  $\varphi_0(\lambda) = \tilde{\varphi}_0(\lambda) + o(1)$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Функция  $\tilde{\varphi}(\lambda)$  кусочно постоянна и можно записать ее в виде

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \sum_{r=1}^k \sum_{t \in \Delta_r} \sum_{\alpha_t=0}^I \exp\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{\mathbf{D}S'_N}} \sum_{r=1}^k \sum_{t \in \Delta'_r} f_{\alpha_t}\right) \nu\left(\bigcap_{r=1}^k \bigcap_{t \in \Delta_r} T^{-t}V_{\alpha_t}\right),$$

где, как и в § 5, значение функции  $\tilde{F}(x)$  на элементе  $V_\alpha \in \mathcal{R}_{n, N}$  обозначено  $f_\alpha$ , и  $I = I(n, N)$ . Заменим фигурирующие в этой формуле безусловные вероятности на условные:

$$\nu\left(\bigcap_{t \in \Delta_1} T^{-t}V_{\alpha_t} / \bigcap_{r=2}^k \bigcap_{t \in \Delta'_r} T^{-t}V_{\alpha_t}\right) \nu\left(\bigcap_{r=2}^k \bigcap_{t \in \Delta'_r} T^{-t}V_{\alpha_t}\right).$$

Используя теорему 4.1 и учитывая, что  $|\Delta'_r| = l \geq n^2$ , получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\lambda) = \sum_{r=1}^k \sum_{t \in \Delta_r} \sum_{\alpha_t=0}^I \exp\left(\frac{i\lambda}{\sqrt{\mathbf{D}S'_N}} \sum_{r=1}^k \sum_{t \in \Delta'_r} f_{\alpha_t}\right) \nu\left(\bigcap_{t \in \Delta_1} T^{-t}V_{\alpha_t}\right) \times \\ \times \nu\left(\bigcap_{r=2}^k \bigcap_{t \in \Delta'_r} T^{-t}V_{\alpha_t}\right) + O(\gamma_1^n) \end{aligned}$$

для некоторого  $\gamma_1 \in (0, 1)$ , не зависящего от  $F$ . Продолжая далее такое «разделение» отрезков  $\Delta_r$  и затем учитывая, что в силу теоремы 1.1  $\mathbf{D}S'_N \sim \sim k\mathbf{D}S_L^{(1)}$ , получим оценку  $\tilde{\varphi}(\lambda) = \tilde{\varphi}_0(\lambda) + o(1)$  при  $N \rightarrow \infty$ . Отсюда  $\varphi(\lambda) = \varphi_0(\lambda) + o(1)$ .

Функция  $\varphi_0(\lambda)$  является характеристической для суммы  $k$  независимых случайных величин, каждая из которых распределена так же, как величина  $\xi_L = S_L^{(1)} / \sqrt{k\mathbf{D}S_L^{(1)}}$ . Рассмотрим последовательность серий независимых случайных величин, одинаково распределенных в каждой серии:

$$\begin{aligned} \xi_{L_1}^{(1)}, \dots, \xi_{L_1}^{(k_1)}, \\ \dots \dots \dots \\ \xi_{L_N}^{(1)}, \dots, \xi_{L_N}^{(k_N)}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

где  $L_N = L$  и  $k_N = k$  определены выше, а  $\xi_{L_N}^{(i)}$  распределены как  $\xi_L$ . Нам осталось проверить, что суммы  $\xi_L^{(1)} + \dots + \xi_L^{(k)}$  сходятся по распределению к стандартному нормальному закону. Для этого необходимо и достаточно выполнения следующего аналога условия Линдберга (см., например, [9]):

$$(6.4) \quad k \int_{|z| > \varepsilon} z^2 d\nu \{\xi_L < z\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

для любого  $\varepsilon > 0$ .

В силу леммы 6.1  $\langle S_L^4 \rangle \leq C(F) L^2$ , поэтому  $\langle \xi_L^4 \rangle \leq C(F) L^2 / (k\mathbf{D}S_L^{(1)})^2 \leq \leq C'(F)/k^2$ . Отсюда и из неравенства Чебышева следует, что  $\nu\{x: |\xi_L| > > |z|\} \leq C'(F)/(k^2 z^2)$ , поэтому

$$k \int_{|z| > \varepsilon} z^2 d\nu \{\xi_L < z\} \leq \frac{C''(F)}{\varepsilon^2 k}$$

и условие (6.4) выполнено.  
Теорема 1.2 доказана.

**З а м е ч а н и е 6.2.** Доказательство теоремы 6.1 без изменений переносится на случай «кусочно гёльдеровских» функций, описанных в § 5 (см. замечание 5.1).

**§ 7. Приложения. Диффузия в детерминированных системах**

Здесь мы выводим теоремы 1.5 и 1.6 как прямое следствие теоремы 1.2. Основную трудность, пожалуй, составляет проверка невырожденности соответствующих предельных гауссовских распределений (условие  $\sigma \neq 0$  в теореме 1.2).

**7.1. Распределение числа отражений.** Напомним, что теоремы 1.5 и 1.6 относятся к рассеивающим бильярдам с конечным горизонтом. В этом случае теорема 1.2 применима к функции  $\tau(x) - \langle \tau \rangle$  (см. замечание 6.2). В результате получим

$$(7.1) \quad \nu \left\{ \frac{\tau(x) + \dots + \tau(T^{n-1}x) - n \langle \tau \rangle}{\sigma_\tau \sqrt{n}} \leq z \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

где  $\sigma_\tau$  определяется по общей формуле (1.2).

Для доказательства теоремы 1.5 запишем  $\nu \{N_t(x) \leq z\} = \nu \{\tau(x) + \dots + \tau(T^n x) > t\}$  при  $n = [z]$ . Отсюда и из (7.1) нетрудно вывести соотношение (1.5) при  $a_1 = 1/\langle \tau \rangle$  и  $b_1 = \sigma_\tau^2/\langle \tau \rangle^3$ .

Осталось доказать, что  $\sigma_\tau \neq 0$ . Если это не так, то в силу замечания 1.4 функция  $\tau(x)$  гомологична константе:

$$(7.2) \quad \tau(x) = \langle \tau \rangle + G(Tx) - G(x)$$

для некоторой  $G \in L_2(M, \nu)$ . Мы покажем, что представление (7.2) невозможно, используя общие факты из эргодической теории.

Бильярдный поток  $\{S^t\}$  представляется как *специальный поток*, построенный на секущей поверхности  $M$  по автоморфизму  $T$  с функцией «потолка»  $\tau(x)$ . Соотношение (7.2) позволяет переопределить секущую поверхность (положив  $M_0 = \{S^{-G(x)}x: x \in M\}$ ) таким образом, что новое представление  $\{S^t\}$  в виде специального потока будет иметь постоянный «потолок» ( $\equiv \langle \tau \rangle$ ). Легко видеть, что специальный поток с постоянным потолком не является  $K$ -поток и даже не перемешивает. Однако наш поток  $\{S^t\}$  обладает  $K$ -свойством (см. [13]). Противоречие.

**7.2. Диффузия в периодическом газе Лоренца.** Теорема 1.6 представляет собой лишь усиленную версию теоремы 2 из [23]. В отличие от [23], здесь мы допускаем точки излома границы  $\partial Q$  и ослабляем условие Б (см. § 2).

Доказательство теоремы 1.6 не отличается от [23], поэтому мы изложим лишь его план. Во-первых, от непрерывного времени  $t$  переходим к дискретному  $n$  — счетчику числа отражений. Тогда (1.6) сводится к следующему:

$$(7.3) \quad \nu \left\{ \left( \frac{q_1^{(n)}(x)}{\sqrt{n}}, \frac{q_2^{(n)}(x)}{\sqrt{n}} \right) \in A \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_A g_1(q_1, q_2) dq_1 dq_2$$

для некоторого (другого) невырожденного распределения Гаусса  $g_1$  с нулевым средним; здесь  $(q_1^{(n)}, q_2^{(n)})$  — положения блуждающей точки в момент  $n$ -го отражения. При сведении (1.6) к (7.3) используется теорема 1.5.

Для доказательства (7.3) вводим двумерную функцию  $(\Delta_1(x), \Delta_2(x))$  на пространстве  $M$  бильярда в исходной области  $Q$  (на торе). А именно, положим  $\Delta_i(x) = \hat{q}_i(x) - q_i(x)$  при  $i = 1, 2$ , где  $q_1, q_2$  — координаты точ-

ки  $x$  в области  $Q$ , а  $\hat{q}_1, \hat{q}_2$  — координаты точки первого отражения от  $\partial Q_\infty$  поднятия траектории точки  $x$  на универсальную накрывающую тора. Иными словами,  $\Delta(x) = (\Delta_1(x), \Delta_2(x))$  есть вектор смещения за одно отражение. Тогда при  $i = 1, 2$  имеем

$$(7.4) \quad q_i^{(n)}(x) = q_i(x) + \Delta_i(x) + \Delta_i(Tx) + \dots + \Delta_i(T^{n-1}x).$$

Начальное слагаемое в (7.4) равномерно ограничено:  $|q_i(x)| \leq 1$ , а к остальной сумме применима теорема 1.2, так как функция  $\Delta_i$  «кусочно гёльдеровская» (см. замечания 5.1 и 6.2) с нулевым средним (это вытекает из соотношения  $\Delta_i(x) = -\Delta_i(Tx)$ ). Более того, к двумерной функции  $\Delta(x) = (\Delta_1(x), \Delta_2(x))$  применим двумерный аналог теоремы 1.2 (см. [23]), который и дает (7.3), если только ковариационная матрица  $V = \|v_{ij}\|$  с элементами

$$v_{ij} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \Delta_i(x) \cdot \Delta_j(T^n x) \rangle$$

при  $1 \leq i, j \leq 2$ , не вырождена.

Докажем, что  $V$  действительно не вырождена. Пусть это не так. Тогда из замечания 1.4 вытекает, что некоторая линейная комбинация компонент  $\Delta_1(x)$  и  $\Delta_2(x)$  гомологична нулю:  $L(x) = a_1\Delta_1(x) + a_2\Delta_2(x) = G(Tx) - G(x)$  для некоторой  $G \in L_2(M, \nu)$ . В этом случае из (7.4) следует, что

$$a_1q_1^{(n)}(x) + a_2q_2^{(n)}(x) = G_0(x) + G(T^n x) - G(x),$$

где  $|G_0(x)| \leq \text{const}$ . Это означает, что траектории типичных точек  $x \in M$  блуждают в  $Q_\infty$ , оставаясь «в основном» внутри некоторой полосы на плоскости. Точнее, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $A_\varepsilon$ , при котором  $\nu\{|a_1q_1^{(n)}(x) + a_2q_2^{(n)}(x)| \geq A_\varepsilon\} < \varepsilon$  для всех  $n \geq 1$ . Если дробь  $a_1/a_2$  рациональна, то проекция данной полосы на достаточно большой тор с фундаментальной областью  $K_{M,N} = \{0 \leq x \leq M, 0 \leq y \leq N\}$ ,  $M, N$  — целые, образует  $A_\varepsilon$ -окрестность периодической обмотки этого тора, и в результате покрывает на нем область относительно малой площади. Но это противоречит эргодичности рассеивающего бильярда на указанном торе с отражателями  $\partial Q_\infty \cap K_{M,N}$  (см. также [23]).

Если  $a_1/a_2$  иррационально, то проекция нашей полосы на любой, сколь угодно большой тор  $K_{M,N}$  (при целых  $M$  и  $N$ ) заполнит его всюду плотно, и предыдущее рассуждение уже недостаточно. В работе [23] этот случай не разобран, поэтому мы остановимся на нем более подробно. Наши конструкции восходят к работе [11], но более громоздки, так как мы имеем дело с разрывными системами и неравномерной гиперболичностью.

**Л е м м а 7.1.** *Найдется периодическая точка  $y_0 \in M$  такая, что сумма  $S_0 = L(y_0) + \dots + L(T^{k-1}y_0)$  отлична от нуля. Здесь  $k$  — период точки  $y_0$  ( $T^k y_0 = y_0$ ).*

Легко видеть, что для любой периодической точки  $y_0$  сумма  $S_0$  равна  $a_1 m_1(y_0) + a_2 m_2(y_0)$  для некоторых целых  $m_1(y_0), m_2(y_0)$ . В нашем случае  $a_1/a_2$  иррационально, поэтому достаточно найти периодическую точку  $y_0$ , для которой  $m_1$  или  $m_2$  отлично от нуля.

Рассмотрим рассеивающий бильярд на торе с фундаментальной областью  $K_{12}$  (см. выше) и с отражателями  $\partial Q_\infty \cap K_{12}$ . Обозначим в этом бильярде  $Q_{12}, M_{12}$  и  $T_{12}$  те объекты, которые обозначались  $Q, M$  и  $T$  соответственно для исходного бильярда. Если  $\mathcal{R}_{\varepsilon,n}$  — предмарковское решето исходного бильярда в  $Q$ , то сдвинув его без изменений в область  $\{0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$ , получим предмарковское решето в  $M_{12}$ . Взяв произвольный па-

параллелограмм  $V \in \mathcal{R}_{\varepsilon, n}$  и его образ при данном сдвиге  $V'$  и применив к ним замечание 4.8, найдем подпараллелограмм  $V_1 \subset V$  такой, что  $T_1^k V_1 \subset V'$  и пересечение  $T^k V_1 \cap V_1$  правильное для некоторого  $k$ . Тогда точка  $y_0 = \dots \cap T^{-k} V_1 \cap V_1 \cap T^k V_1 \cap T^{2k} V_1 \cap \dots$  периодическая с периодом  $k$  и для нее  $m_2(y_0)$  нечетно, т. е. отлично от нуля. Лемма доказана.

**Л е м м а 7.2.** Пусть  $y_0$  — периодическая точка. Для любого  $\varepsilon_0 > 0$  найдется 0-однородный параллелограмм  $U_0 \ni y_0$  такой, что  $y_0 \notin \partial K(U_0)$  (т. е.  $y_0$  лежит строго внутри  $K(U_0)$ ) и  $\nu(U_0)/\nu(K(U_0)) > 1 - \varepsilon_0$  (т. е.  $U_0$  «достаточно плотный»).

Доказательство леммы основано на тех же рассуждениях, что и аналогичные построения в п. 3.5, и мы его опускаем.

Зафиксируем точку  $y_0$  из леммы 7.1 и параллелограмм  $U_0$  из леммы 7.2 при некотором малом  $\varepsilon_0$ . Если  $U_0$  достаточно мал, то  $T^k U_0$  также 0-однороден и пересечение  $T^k U_0 \cap U_0$  правильное.

Пусть теперь  $G(x) \in L_2(M, \nu)$  — гомология функции  $L(x)$ , т. е.  $L(x) \equiv G(Tx) - G(x)$  почти всюду в  $M$ . Если бы  $G(x)$  была существенно ограничена, то как и в [11], мы сразу же пришли бы в противоречие с леммой 7.1. Используя же только измеримость и интегрируемость  $G$ , мы можем получить следующее:

**Л е м м а 7.3.** Для любого  $\varepsilon_1 > 0$  найдется 0-однородный параллелограмм  $U_1$  такой, что  $\nu(U_1)/\nu(K(U_1)) > 1 - \varepsilon_1$  (т. е.  $U_1$  «достаточно плотен») и  $\nu\{x \in U_1: |G(x) - g| > \varepsilon_1\}/\nu(U_1) < \varepsilon_1$  для некоторого  $g \in \mathbb{R}$  (т. е.  $G(x)$  хорошо аппроксимируется на  $U_1$  постоянной функцией  $G \equiv g$ ).

Определим «квазипроизводное» отображение  $T_1: U_1 \rightarrow U_1$  следующим образом. Для точки  $x \in U_1$  найдем на ее траектории первый при  $n > 0$  образ в  $U_0$ , а после него — первый образ в  $U_1$ . Это и будет  $T_1 x$ . Отображение  $T_1$  необратимо на множестве тех точек  $x \in U_1$ , траектории которых успевают вернуться в  $U_1$  до первого попадания в  $U_0$ . Уменьшив параллелограмм  $U_1$ , мы всегда можем сделать  $T_1$  обратимым и сохраняющим меру  $\nu$  на  $U_1$ .

Определим на  $U_1$  два отображения  $\Phi$  и  $\Phi_1$ . Пусть  $x \in U_1$ ,  $T^{n_0} x \in U_0$  — первое попадание ее траектории в  $U_0$  и  $T^{n_1} x = T_1 x$  ( $n_1 > n_0$ ). Обозначим  $\tilde{x} = \gamma^{\nu}(T^{n_0+k} x) \cap \gamma^{\varepsilon}(T^{n_0} x)$  и положим  $\Phi x = T^{-n_0-k} \tilde{x}$  и  $\Phi_1 x = T^{n_1-n_0} \tilde{x}$ . Тогда  $\Phi x$  — точка, лежащая рядом с точкой  $x$  на одном ОЛНМ, а  $\Phi_1 x$  лежит рядом с  $T_1 x$  на одном ОЛЮМ. Кроме того,  $T^{n_1+k}(\Phi x) = \Phi_1 x$ .

Обозначим  $S(x) = L(x) + \dots + L(T^{n_1-1} x)$  и  $S'(\Phi x) = L(\Phi x) + \dots + L(T^{n_1+k-1}(\Phi x))$ .

**Л е м м а 7.4.**  $|S'(\Phi x) - S(x)| \geq S_0 - \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_2$  достаточно мало (точнее,  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  при  $\text{diam } U_0 \rightarrow 0$ ).

Действительно, траектории точек  $x$  и  $\Phi x$  близки в течение первых  $n_0$  итераций. Далее, траектории точек  $T^{n_0} x$  и  $T^{n_0+k}(\Phi x) = \tilde{x}$  также близки в течение  $n_1 - n$  итераций. Из гёльдеровости функции  $L(x)$  на областях непрерывности отображения  $T$  вытекает близость соответствующих сумм, входящих в интересующие нас суммы  $S(x)$  и  $S'(\Phi x)$ . Остаются неучтенными ровно  $k$  слагаемых в сумме  $S'(\Phi x)$ , составленных по образам точки  $T^{n_0}(\Phi x) = T^{-k} \tilde{x}$ . Но эти образы аппроксимируют периодическую орбиту точки  $y_0$ , поэтому соответствующая сумма значений функции  $L$  близка к  $S_0$ . Лемма доказана.

Из леммы 7.4 следует неравенство

$$(7.5) \quad |G(T_1 x) - G(x)| + |G(\Phi_1 x) - G(\Phi x)| \geq S_0 - \varepsilon_2.$$

Остается доказать, что для большинства (по мере  $\nu$ ) точек  $x \in U_1$  оба их образа  $\Phi x$  и  $\Phi_1 x$  попадают в  $U_1$ , и множества этих образов  $\{\Phi x\}$  и  $\{\Phi_1 x\}$  имеют относительно большую меру ( $> \text{const } \nu(U_1)$ ). Тогда для таких точек

$\Phi_1 x = T_1(\Phi x)$ , и вместе с (7.5) это приводит к противоречию со второй оценкой в лемме 7.3.

Иследуем множества  $\Phi U_1$  и  $\Phi_1 U_1$ . Используем обозначения, введенные при определении отображений  $\Phi$  и  $\Phi_1$ . Поскольку  $T^n x \in U_0$ , то  $\gamma_0 = \gamma_{K(U_0)}^u(T^n x)$  является ОЛНМ, натянутым на  $K(U_0)$ . Его прообраз  $T^{-n} \gamma_0$  — это подотрезок в ОЛНМ  $\gamma_{K(U_1)}^u(x)$ . В силу плотности параллелограмма  $U_1$  для типичных  $x$  образ  $T^n U_1$  имеет высокую плотность на  $\gamma_0$ . Отображение, переводящее  $T^n x$  в  $T^k x$  является сжатием ОЛНМ  $\gamma_0$  с коэффициентом, близким к  $\Lambda_1 = \Lambda_k^u(y_0)$  (это коэффициент сжатия ЛНМ  $\gamma^u(y_0)$  в точке  $y_0$  под действием  $T^{-k}$ ). В силу 0-однородности  $U_0$  и  $U_1$  условные меры множеств  $U_1$  и  $\Phi U_1$  на  $T^{-n} \gamma_0$  относятся как 1: ( $\text{const } \Lambda_1^{-1}$ ). Это и приводит к необходимой оценке:  $\nu(\Phi U_1) \geq \text{const } \Lambda_1^{-1} \nu(U_1)$ . Аналогично,  $\nu(\Phi_1 U_1) \geq \text{const } \Lambda_2^{-1} \nu(U_1)$ , где  $\Lambda_2 = \Lambda_k^s(y_0)$  — коэффициент сжатия ЛУМ  $\gamma^s(y_0)$  в точке  $y_0$  под действием  $T^k$ .

Теорема 1.6 доказана.

#### П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

Доказательства теоремы 3.6 и леммы 3.7 основываются на аккуратном, но довольно трудоемком исследовании особенностей отображения  $T$ . Мы проведем его в несколько этапов, рассмотрев последовательно различные классы бильярдов, для которых выше сформулированы теоремы 1.1 и 1.2.

**П1.1. Предварительные оценки для рассеивающих бильярдов.** Величины, входящие в определение 3.1 и лемму 3.7, тесно связаны друг с другом, поэтому удобно оценивать их одновременно. Далее, принцип двойственности (замена  $T$  на  $T^{-1}$  и, соответственно,  $\gamma^s$  на  $\gamma^u$ ,  $B^s$  на  $B^u$  и т. д., — подробнее см. [4]), позволяет свести теорему 3.6 и лемму 3.7 к одному предложению:

**П р е д л о ж е н и е П1.1.** Пусть  $x, y$  — точки одного  $n$ -однородного ЛУМ. Тогда

- а)  $|B^u(x)/B^u(y) - 1| \leq C \alpha_0^n$ ;
- б)  $|B^s(x)/B^s(y) - 1| \leq C \alpha_0^n$ ;
- в)  $|J^u(x, y) - 1| \leq C \alpha_0^n$ ;
- г)  $|\Lambda_k^s(x)/\Lambda_k^s(y) - 1| \leq C \alpha_0^n$  для любого  $k \geq 1$ .

Здесь  $J^u(x, y)$  означает якобиан канонического изоморфизма ЛНМ  $\gamma^u(x)$  и ЛНМ  $\gamma^u(y)$  по мере  $p(\cdot)$  (в точке  $x$ ), а  $\Lambda_k^s(x)$  — локальный коэффициент сжатия ЛУМ  $\gamma^s(x)$  в точке  $x$  под действием  $T^k$ .

**З а м е ч а н и е.** В предложении П1.1 и далее в наших Приложениях символом  $C$  обозначаются различные постоянные величины, определяемые выбором  $\nu$  и  $n_0$  в определении 3.3 (и, конечно, зависящие от бильярдной области  $Q$ ), точные значения которых для нас несущественны.

Напомним (§ 2), что длины всех ЛНМ и ЛУМ, коэффициенты растяжения и сжатия определяются, если не оговорено противное, по мере  $p$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Начнем с того, что сведем утверждения (в) и (г) к утверждениям (а) и (б). Из общих свойств отображения  $T$  (§ 2) следует, что  $\Lambda_k^s(x) = \lambda^s(x) \cdot \dots \cdot \lambda^s(T^{k-1}x)$ , где  $\lambda^s(z) = 1 + \tau(x) B_-^s(Tx)$ , а  $B_-^s(x) = R(Tx) + B^s(Tx)$ . Поэтому

$$(П1.1) \quad \frac{\Lambda_k^s(x)}{\Lambda_k^s(y)} = \prod_{i=1}^k \frac{1 + \tau(T^{i-1}x) B_-^s(T^i x)}{1 + \tau(T^{i-1}y) B_-^s(T^i y)}.$$

Аналогично, коэффициент растяжения ЛНМ  $\gamma^u(x)$  в точке  $x$  под действием  $T^k$ ,  $k \geq 0$ , выражается формулой  $\Lambda_k^u(x) = \lambda^u(x) \cdot \dots \cdot \lambda^u(T^{k-1}x)$ , где  $\lambda^u(x) = 1 + \tau(x) B^u(x)$ . Как показано в [2, 22, 27],

$$(П1.2) \quad J^u(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^k \frac{1 + \tau(T^i x) B^u(T^i x)}{1 + \tau(T^i y) B^u(T^i y)}.$$

Из формул (П1.1) и (П1.2) видно, что для доказательства утверждений (в) и (г) достаточно оценить близость величин  $B^{u,s}(T^i x)$  и  $B^{u,s}(T^i y)$ , а также величин  $\tau(T^i x)$  и  $\tau(T^i y)$ . Точнее, (в) и (г) следуют из (а) и (б) и одной дополнительной леммы:

**Л е м м а П1.2.** Пусть  $x, y$  — точки одного  $n$ -однородного ЛУМ или ЛНМ. Тогда

$$\frac{|\tau(x) - \tau(y)|}{1 + \tau(y) B^u(y)} B^u(x) \leq C \alpha_0^n.$$

Доказательство леммы пока отложим (оно будет проведено в пп. П1.2, П1.3) и перейдем к утверждениям (а) и (б). Для сравнения двух цепных дробей (коими являются  $B^{u,s}(x)$  и  $B^{u,s}(y)$  — см. § 2) существует прием, который мы продемонстрируем на примере дробей  $B_-^s(x)$  и  $B_-^s(y)$ .

Напомним (§ 2), что  $B_-^s(x) = R(x) + B^s(x) = R(x) + (\tau(x) + B_-^s(Tx))^{-1}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} B_-^s(x) - B_-^s(y) &= R(x) - R(y) + B^s(x) B^s(y) ((B^s(y))^{-1} - (B^s(x))^{-1}) = \\ &= R(x) - R(y) - \frac{B_-^s(Tx) B_-^s(Ty)}{\lambda^s(x) \lambda^s(y)} (\tau(x) - \tau(y)) + \frac{1}{\lambda^s(x) \lambda^s(y)} (B_-^s(Tx) - B_-^s(Ty)). \end{aligned}$$

Продолжая это разложение последовательно  $k$  раз, получим

$$(П1.3) \quad B_-^s(x) - B_-^s(y) = \sum_{i=0}^{k-1} (\Delta R)_i - \sum_{i=0}^{k-1} (\Delta \tau)_i + (\Delta B)_k,$$

где обозначено

$$(\Delta R)_i = \frac{1}{\Lambda_i^s(x) \Lambda_i^s(y)} (R(T^i x) - R(T^i y)),$$

$$(\Delta \tau)_i = \frac{B_-^s(T^{i+1}x) B_-^s(T^{i+1}y)}{\Lambda_{i+1}^s(x) \Lambda_{i+1}^s(y)} (\tau(T^i x) - \tau(T^i y)),$$

$$(\Delta B)_k = \frac{1}{\Lambda_k^s(x) \Lambda_k^s(y)} (B_-^s(T^k x) - B_-^s(T^k y)).$$

Аналогичное разложение имеет место и для  $B^u(x) - B^u(y)$ , но строится оно по  $k$  отражениям «в прошлом» (т. е. по точкам  $T^{-1}x, T^{-2}x, \dots, T^{-k}x$ ). Отметим, что если  $k \leq n$ , то точки  $T^{-k}x$  и  $T^{-k}y$  лежат на одном ОЛУМ.

**З а м е ч а н и е 1.** В силу гиперболичности отображения  $T$  (см. 2.2)  $|\Lambda_i^{u,s}(x)| \geq \Lambda_0^{[i/m_0]}$  при всех  $x \in M$  и  $i \geq 1$ . Кроме того, длина  $n$ -однородных ЛНМ и ЛУМ не превышает  $C \lambda_0^n$ , где  $\lambda_0 = \Lambda_0^{-1/m_0}$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Для любого  $x \in M$  и  $i \geq 1$  имеем  $B^s(x) \Lambda_i^s(x) \geq B_-^s(T^i x)$ , что нетрудно проверить, используя представление величины  $B^s$  в виде цепной дроби (2.5).

Разложение (П1.3) и сделанные выше замечания сводят утверждения (а) и (б) к лемме П1.2 и следующим двум:

**Л е м м а П1.3.** Если точки  $x, y$  лежат на одном  $n$ -однородном ЛУМ или ЛНМ, то

$$\frac{|R(x) - R(y)|}{B^u(x)} \leq C\alpha_0^n.$$

**Л е м м а П1.4.** Если точки  $x, y$  лежат на одном ОЛУМ или ОЛНМ, то

$$\frac{B^u(x)}{B^u(y)} \leq C.$$

В леммах П1.2—П1.4 фигурируют две точки  $x$  и  $y$  на одном ЛНМ или ЛУМ. Обозначим далее  $\gamma_0$  участок этого ЛНМ (ЛУМ), ограниченный точками  $x$  и  $y$ .

Нам осталось доказать леммы П1.2—П1.4. Проведем их доказательство вначале для относительно простых бильярдов, а затем для более сложных. Под простыми мы понимаем такие бильярды, что граница  $\partial Q$  не имеет точек излома (это возможно, если  $Q$  — тор с несколькими вырезанными выпуклыми «дырками», имеющими гладкую границу). В этом случае особенности отображения  $T$  возникают только при касательных отражениях, т. е. на множестве  $S_0 \cup S_{-1}$  (в то время как  $V_0$  пусто). Точки излома границы  $\partial Q$  добавляют еще один вид особенностей — на множестве  $V_0 \cup V_{-1}$ .

**П1.2. Рассеивающие бильярды без точек излома границы.** В этом случае время свободного пробега отделено от нуля:  $\tau(x) \geq \tau_0 > 0$ . Поэтому неравенство в лемме П1.2 сводится к более простому:

$$(П1.4) \quad |\tau(x) - \tau(y)| \leq C\alpha_0^n.$$

Для доказательства последнего используем очевидное соотношение:

$$(П1.5) \quad |\tau(x) - \tau(y)| \leq |r(x) - r(y)| + |r(Tx) - r(Ty)|.$$

Величина в правой части (П1.5) не превосходит  $C(\sqrt{p(\gamma_0)} + \sqrt{p(T\gamma_0)})$  — см. (2.3) (здесь следует обратить внимание на то, что если  $\gamma_0$  является ЛНМ и  $n = 0$ , то все равно его образ  $T\gamma_0$  целиком лежит на одной регулярной компоненте  $\partial Q$  в соответствие с определением ОЛНМ — см. п. 3.3). После этого лемма П1.2 вытекает из гиперболичности отображения  $T$  (см. (2.2)).

Из того же ограничения  $\tau_-(x) \geq \tau_0 > 0$  следует, что

$$(П1.6) \quad |B^u(x) - R(x)| \leq C.$$

Функция  $R(x) = 2\kappa(x)/\cos \varphi(x)$  непрерывно дифференцируема на  $M$ , но обращается в бесконечность на множестве  $S_0$ . Наши отрезки дробления (§ 3) устроены так, что  $R(x)$  не испытывает слишком больших колебаний внутри полосок между этими отрезками (последние для краткости будем называть *полосками однородности*). Поскольку кривая  $\gamma_0$  однородна, то она целиком лежит в одной из полосок однородности, например, с номером  $k$  (т. е. в полоске, задаваемой неравенствами  $(k+1)^{-\nu} < \pi/2 - |\varphi| < k^{-\nu}$ ). Тогда легко видеть, что  $\cos \varphi(x) \approx \cos \varphi(y) \approx Ck^{-\nu}$ , поэтому  $R(x) \approx R(y) \approx Ck^\nu$ . Отсюда и из (П1.6) получаем лемму П1.4 и, кроме того, в силу (2.4)

$$(П1.7) \quad 0 < C_1 \leq \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{r(x) - r(y)} \right| \leq C_2 < \infty,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  определяются только областью  $Q$ . Из последнего неравенства следует, что  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq Ck^{1-\nu}$  и поэтому  $p(\gamma_0) \approx C|r(x) -$

—  $r(y) | \cos \varphi(x) \approx C | \varphi(x) - \varphi(y) | k^{-\nu}$ . Отсюда легко выводятся две оценки, которые нам понадобятся и далее:

$$(П1.8) \quad |r(x) - r(y)| \leq (p(\gamma_0))^{\frac{1+\nu}{1+2\nu}},$$

$$(П1.9) \quad (p(\gamma_0))^{\frac{\nu}{1+2\nu}} \leq (B^u(x))^{-1} \approx C/R(x).$$

После этого лемма П1.3 доказывается следующим образом:

$$\left| \frac{R(x) - R(y)}{B^u(x)} \right| \leq C \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{\cos \varphi(x)} \right| \leq C (p(\gamma_0))^{\frac{1}{1+2\nu}}$$

и, наконец, используется гиперболичность отображения  $T$ .

Отметим, что неравенства (П1.8) и (П1.9) справедливы и вне окрестности множества  $S_0$ , т. е. для *любого* ОЛНМ (ОЛУМ)  $\gamma_0$  с концами  $x$  и  $y$ . В следующем разделе мы покажем их справедливость и для рассеивающих бильярдов с точками излома границы.

**П1.3. Рассеивающие бильярды с точками излома границы.** Отметим сразу, что вывод лемм П1.2—П1.4 в этом случае существенно усложняется. По-существу, анализ особенностей отображения  $T$  на множестве  $V_0 \cup V_{-1}$  до сих пор никем не проводился, так как авторы исследований эргодических свойств бильярдов, как правило, исключали такие случаи из рассмотрения— [13, 5, 22, 27].

К счастью, в этих случаях имеется одно обстоятельство, существенно упрощающее дело:

*Лемма П1.5. Для любого рассеивающего бильярда, удовлетворяющего условию А, найдутся  $\varepsilon_0 > 0$  и  $\varphi_0 > 0$  такие, что в любой серии последовательных отражений бильярдной траектории, происходящих в  $\varepsilon_0$ -окрестности одной из точек излома границы  $\partial Q$ , может быть лишь одно «почти касательное» отражение, в котором угол отражения  $> \pi/2 - \varphi_0$ . Если такое отражение имеется, то оно в рассматриваемой серии крайнее (первое или последнее), т. е. перед ним или после него длина свободного пробега  $> \varepsilon_0$ .*

Эта лемма означает, что «двойная неприятность», когда  $\cos \varphi(x)$  и  $\tau_{\pm}(x)$  одновременно близки к нулю, происходит не часто — не более одного раза в каждой серии отражений, происходящих в малой окрестности «бильярдного угла».

**Доказательство леммы П1.5.** Граница  $\partial Q$  имеет конечное число точек излома, поэтому достаточно рассмотреть только одну из них. В этом виде лемма превращается в геометрическую задачу почти школьного уровня. Ключ к ее решению содержится в рис. 7. На этом рисунке компоненты  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  границы  $\partial Q$  образуют угол  $\psi$  с вершиной  $O$ . Если  $\varepsilon_0$  достаточно мало и траектория «почти» касается  $\Gamma_1$  при первом отражении, то следующие отражения «поворачивают» ее вектор скорости так, как показано на рисунке, — номера векторов соответствуют номерам отражений. Согласно этой схеме второе «почти» касательное отражение может произойти либо

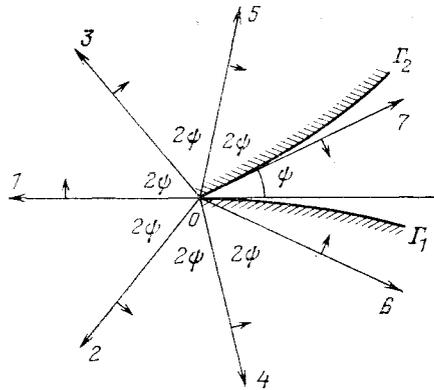


Рис. 7

от  $\Gamma_1$ , если  $\psi \approx \pi/n$  ( $n$  — целое), либо от  $\Gamma_2$ , если  $\psi \approx 2\pi/(2n+1)$  ( $n$  — целое). На рисунке изображены второй случай. Из-за искривления компонент границы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  действительные положения векторов скорости несколько отличаются от изображенных на рисунке: их следует чуть повернуть вокруг точки  $O$  в направлениях, указанных короткими стрелками на некоторые хоть и малые, но *положительные* углы. Эти повороты и исключают возможность повторного «почти» касательного отражения, так как последний вектор скорости будет направлен строго внутрь области  $Q$ , что доказывает лемму.

**З а м е ч а н и е П1.6.** Напомним, что при определении кривых дробления  $\mathcal{D}$  в § 3 к отрезкам дробления  $\mathcal{L}_0$  были добавлены некоторые их образы. Здесь мы определяем эти образы точно:  $\mathcal{D}_1 = \{T^i z: z \in \mathcal{D}_0 \text{ и если } i > 0, \text{ то } \tau(z) \leq \varepsilon_0, \tau(Tz) \leq \varepsilon_0, \dots, \tau(T^{i-1}z) \leq \varepsilon_0, \text{ а если } i < 0, \text{ то } \tau(T^i z) \leq \varepsilon_0, \dots, \tau(T^{-1}z) \leq \varepsilon_0\}$ .

**З а м е ч а н и е.** Величины  $\varepsilon_0$  и  $\varphi_0$  определяются только областью  $Q$ , поэтому появляющиеся в дальнейшем постоянные, обозначаемые  $C$ , будут также зависеть от  $\varepsilon_0$  и  $\varphi_0$ .

Переходим к доказательству лемм П1.2—П1.4 в рассматриваемом случае. Если  $\tau_{\pm}(x) > \varepsilon_0$  и  $\tau_{\pm}(y) > \varepsilon_0$ , то доказательство проводится так же, как и в п. П1.2. Пусть хотя бы одна из величин  $\tau_{\pm}(x)$  и  $\tau_{\pm}(y)$  не превышает  $\varepsilon_0$ , т. е. мы находимся в малой окрестности «бильярдного угла». Тогда найдется такое  $i_0 \geq 0$ , что  $\tau_-(T^{-i_0}x) > \varepsilon_0$  и  $\tau_-(T^{-i_0}y) > \varepsilon_0$ , но при всех  $0 \leq i < i_0$  либо  $\tau_-(T^{-i}x) \leq \varepsilon_0$ , либо  $\tau_-(T^{-i}y) \leq \varepsilon_0$ . Последовательность отражений точек  $x$  и  $y$  с номерами от  $-i_0$  до 0 мы назовем *серией угловых отражений*. Если в этой серии не было «почти» касательных отражений, т. е.  $|\varphi(T^i x)| \leq \pi/2 - \varphi_0$  при всех  $-i_0 \leq i \leq 0$ , то  $B^u(x) \leq C < \infty$ .<sup>1</sup> Это легко вытекает из оценки

$$(П1.10) \quad B^u(x) \leq R(x) + R(T^{-1}x) + \dots + \\ + R(T^{-i_0}x) + (\tau_-(T^{-i_0}x))^{-1}$$

и ограничения  $i_0 \leq m_0$  (см. замечание 2.1). Далее доказательства всех утверждений проходят так же, как и в п. П1.2.

Пусть теперь в рассматриваемой серии угловых отражений есть одно «почти» касательное, т. е.  $|\varphi(T^j x)| \geq \pi/2 - \varphi_0$  при некотором  $j \in [-i_0, 0]$ . Согласно лемме П1.5 это отражение крайнее, т. е. либо  $j = -i_0$ , либо  $j = 0$ . Отметим, что в обоих случаях точка  $T^j x$  лежит в окрестности  $S_0 \cap V_0$ , т. е. вблизи вершины одного из прямоугольников, составляющих фазовое пространство  $\bar{M}$ .

Используя оценку (П1.10), легко показать, что в точке  $T^j x$  выполнен аналог соотношения (П1.6):  $|B^u(T^j x) - R(T^j x)| \leq C$ . Отсюда и из (2.4) следует, что

$$0 < C_1 \leq \left| \frac{\varphi(T^j x) - \varphi(T^j y)}{r(T^j x) - r(T^j y)} \right| \leq C_2 < \infty.$$

Отметим, что таким образом свойство (П1.7) выполнено для всех ОЛНМ и ОЛУМ в некоторой окрестности множества  $S_0$  (в § 2 отмечалось, что в окрестности  $V_0$  оно иногда нарушается). Далее, мы рассмотрим отдельно случаи  $j = 0$  и  $j = -i_0$ .

Случай  $j = 0$  относительно прост. Согласно лемме П1.5,  $\tau(x) > \varepsilon_0$  и  $\tau(y) > \varepsilon_0$ , а в силу оценки (П1.10) выполнено соотношение (П1.6), а значит, и (П1.8), (П1.9). Поэтому леммы П1.2—П1.4 доказываются так же, как и в п. П1.2.

Случай  $j = -i_0$  требует более подробного анализа. Дело в том, что в этом случае величина  $B^u(x)$  также может быть сколь угодно большой, но не за счет большого  $R(x)$ , а из-за большого  $R(T^{-i_0}x)$  и малых «времен перехода»  $\tau(T^{-i_0}x), \dots, \tau(T^{-1}x)$ . Образно говоря, ЛНМ  $\gamma^u(T^{-i_0}x)$  не успевает «выпрямиться» после «почти» касательного отражения в точке  $T^{-i_0}x$ , поэтому его кривизна в точке  $x$  остается большой. Доказательство лемм П1.2—П1.4 в этом случае основывается на серии технических оценок.

Во-первых, в формуле (П1.10) величины  $R(x), \dots, R(T^{-i_0+1}x)$  равномерно ограничены сверху, и  $i_0 \leq m_0$ , откуда получаем ограничение на  $B^u(x)$ :

$$(П1.11) \quad B^u(x) \leq B^u(T^{-i_0}x) + C.$$

Докажем теперь неравенство

$$(П1.12) \quad |\tau(T^i x) - \tau(T^i y)| \leq C(p(T^{-i_0}\gamma_0))^{\frac{1+v}{1+2v}}$$

при всех  $i = -i_0, -i_0 + 1, \dots, -1$ , и даже при  $i = 0$ , если только  $\tau(y) \leq \leq \epsilon_0$ .

Рассмотрим несколько случаев. Пусть  $i = -i_0$ . Тогда кривая  $T^i\gamma_0$  лежит в окрестности множества  $S_0$ , т. е. в одной из полосок однородности, и для точек  $x$  и  $y$  выполнены оценки (П1.6—П1.9). В этом случае оценка (П1.12) легко выводится с помощью (П1.5).

Пусть  $i > -i_0$ . Тогда кривые  $T^i\gamma_0$  и  $T^{i+1}\gamma_0$  лежат вне окрестности множества  $S_0$  и, тем самым,  $p(T^i\gamma_0) \geq C|r(T^i x) - r(T^i y)|$  и  $p(T^{i+1}\gamma_0) \geq C|r(T^{i+1}x) - r(T^{i+1}y)|$ . В силу (П1.5) получаем

$$(П1.13) \quad |\tau(T^i x) - \tau(T^i y)| \leq C(p(T^i\gamma_0) + p(T^{i+1}\gamma_0)).$$

Если  $\gamma_0$  — ЛУМ, то оценка (П1.12) получается из (П1.13) немедленно. Если  $\gamma_0$  — ЛНМ, то нам необходимо дополнительно оценить коэффициент растяжения  $\Lambda_l^u(z)$ ,  $z \in T^{-i_0}\gamma_0$  ЛНМ  $T^{-i_0}\gamma_0$  в каждой точке  $z$  под действием  $T^l$ , где  $l = 1, 2, \dots, i_0 + 1$ . Покажем, что

$$(П1.14) \quad \Lambda_l^u(z) \leq C(1 + \tau(z) + \dots + \tau(T^{l-1}z)) B^u(z).$$

Это означает, что коэффициент  $\Lambda_l^u(z)$  (с точностью до множителя  $C$ ) определяется только главным («почти» касательным) отражением в точке  $z$  и временем движения ЛНМ от точки  $z$  до точки  $T^l z$ .

При  $l = 1$  формула (П1.14) очевидна. Докажем ее при  $l = 2$ :

$$\begin{aligned} & (1 + \tau(z) B^u(z)) (1 + \tau(Tz) B^u(Tz)) = \\ & = (1 + (\tau(z) + \tau(Tz)) B^u(z) + R(Tz) \tau(Tz) (1 + \tau(z) B^u(z)) \leq \\ & \leq (1 + R(Tz) \tau(Tz)) (1 + (\tau(z) + \tau(Tz)) B^u(z)). \end{aligned}$$

При  $l \geq 3$  оценка (П1.14) доказывается по индукции, с учетом ограничения  $l \leq m_0$ .

**З а м е ч а н и е.** При доказательстве (П1.14) и в дальнейшем для нас существенен тот факт, что если  $\gamma_0$  — ЛНМ, то его прообраз  $T^{-i_0}\gamma_0$  должен целиком лежать в одной из полосок однородности. Для этого и были введены дополнительные кривые дробления  $\mathcal{D}_1$  в § 3.

Из доказанной оценки (П1.14) следует, что в формуле (П1.13)  $p(T^i\gamma_0) \leq \leq p(T^{i+1}\gamma_0) \leq C B_{\max}^u(T^{-i_0}\gamma_0) p(T^{-i_0}\gamma_0)$ , где  $B_{\max}^u(T^{-i_0}\gamma_0)$  означает максимум величины  $B^u$  на кривой  $T^{-i_0}\gamma_0$ . Наконец, отсюда и из (П1.9) получаем оценку (П1.12).

Докажем теперь леммы П1.2—П1.4. Начнем с последней из них. При  $i_0 = 0$  она вытекает из оценки (П1.6). При  $i_0 = 1$  имеем:

$$\frac{B^u(x)}{B^u(y)} = \frac{R(x) + (\tau(T^{-1}x) + (B^u(T^{-1}x))^{-1})^{-1}}{R(y) + (\tau(T^{-1}y) + (B^u(T^{-1}y))^{-1})^{-1}} \leq \leq C(1 + |\tau(T^{-1}x) - \tau(T^{-1}y)| B^u(T^{-1}y))$$

и далее используются уже доказанные формулы (П1.11) и (П1.12). При  $i_0 \geq 2$  лемма доказывается по индукции.

Лемма П1.3 при  $i_0 = 0$  доказывается так же, как и в п. П1.2, а при  $i_0 \geq 1$  кривая  $\gamma_0$  лежит вне окрестности множества  $S_0$ , поэтому  $|R(x) - R(y)| \leq C(|r(x) - r(y)| + |\varphi(x) - \varphi(y)|) \leq C\sqrt{p}(\gamma_0)$  (см. (2.3)).

Доказательство леммы П1.2 при  $\tau(y) > \varepsilon_0$  проходит так же, как в п. П1.2. При  $\tau(y) \leq \varepsilon_0$  достаточно последовательно применить (П1.12) (при  $i = 0$ ), (П1.11) и (П1.9):

$$|\tau(x) - \tau(y)| B^u(x) \leq C(p(T^{-i_0}\gamma_0))^{\frac{1+v}{1+2v}} B^u(T^{-i_0}x) \leq C(p(T^{-i_0}\gamma_0))^{\frac{1}{1+2v}}.$$

Таким образом, утверждения 3.6 и 3.7 доказаны для всех рассеивающих билиардов.

**П1.4. Полурассеивающие билиарды.** Наша дальнейшая тактика состоит в том, чтобы свести случаи полурассеивающих и фокусирующих билиардов к уже рассмотренным рассеивающим билиардам.

Наиболее легко эта операция проходит для полурассеивающих билиардов. В этом случае цепные дроби  $B^{u,s}(x)$  имеют нулевые четные члены ( $R(T^i x) = 0$ ) в точках, соответствующих отражениям от нейтральных компонент границы. Очевидное соотношение

$$\tau_i + \frac{1}{0 + \frac{1}{\tau_{i+1} + \dots}} = \tau_i + \tau_{i+1} + \dots$$

позволяет «свернуть» дробь  $B^{u,s}(x)$ , исключив из нее все нулевые члены.

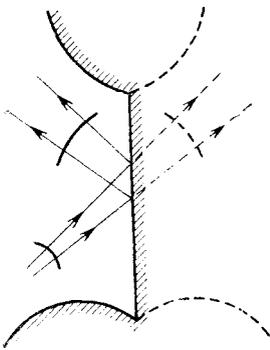


Рис. 8

После этого нечетные члены «свернутых» дробей будут соответствовать интервалам движения между последовательными отражениями от рассеивающих компонент границы (отражения от нейтральных компонент просто пропускаются).

Геометрически это означает, что вместо отражения ЛНМ (или ЛУМ) от нейтральной компоненты  $\Gamma_0$  мы отражаем саму область  $Q$  относительно компоненты  $\Gamma_0$ , а ЛНМ (ЛУМ) продолжает двигаться внутри отраженной области, как будто стенка  $\Gamma_0$  была прозрачная (рис. 8). При этом геометрические характеристики исходного ЛНМ (ЛУМ), т. е. его кривизна и длина в каждый момент времени будут такими же, как и у его «двойника», прошедшего сквозь  $\Gamma_0$  без отражения. Поэтому свойства ЛНМ и ЛУМ в полурассеивающих билиардах такие же, как и у их двойников, движущихся по законам рассеивающего билиарда. К этим двойникам применимы в точности все выкладки, сделанные в п.п. П1.1—П1.3, поэтому все результаты переносятся без изменений.

Идея двойников для ЛНМ и ЛУМ будет использована и в следующем разделе.

**П1.5. Гиперболические бильярды с фокусирующими компонентами границы.** Прежде всего отметим, что в этом случае цепные дроби  $B^{u,s}$  знакочередовательны и потому многие выкладки из п.п. П1.1—П1.3 нуждаются в уточнении. Кроме того, производное отображение  $T$  определяется иначе, чем в случае рассеивающих бильярдов — см. § 2, и это различие мы сможем «нейтрализовать», используя идею двойников ЛНМ и ЛУМ из предыдущего раздела.

Вначале модифицируем цепные дроби  $B^{u,s}(x)$ . Пусть бильярдная траектория испытывает  $n$  отражений подряд от одной фокусирующей компоненты  $\Gamma_1 \subset \partial Q$ . Будем называть такие серии отражений  $\Phi$ -сериями. Поскольку  $\Gamma_1$  — дуга окружности, то все углы отражений одинаковы ( $=\varphi$ ) и интервалы движения между отражениями постоянны ( $\tau = 2R_1 \cos \varphi$ , где  $R_1$  здесь и далее означает радиус дуги  $\Gamma_1$ ). Соответствующий участок цепной дроби  $B^{u,s}(x)$  допускает следующую «свертку»:

$$(П1.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{4}{\tau} + \frac{1}{\tau + \frac{1}{-\frac{4}{\tau} + \frac{1}{\tau + \dots}}} = -\frac{2}{\tau} + \frac{1}{-(n-1)\tau + \frac{1}{-\frac{2}{\tau} + \dots}} \\ n \text{ раз} \end{array} \right.$$

При этом если  $n = 1$ , то справа будет стоять такая же дробь  $-\frac{4}{\tau} + \dots$ , как и слева. Равенство (П1.15) легко проверяется индукцией по  $n$ .

Преобразованная дробь  $B^u$ , в которой все  $\Phi$ -серии «свернуты» с помощью (П1.15), соответствует движению ЛНМ-двойника по следующим законам. Подходя к очередной фокусирующей компоненте  $\Gamma_1$  радиуса  $R_1$ , оно отражается от (фокусирующей) дуги вдвое большего радиуса  $2R_1$ , затем движется назад (!) в течение времени  $(n - 1)\tau$  (т. е. как раз то время, которое исходное ЛНМ проводит между первым и последним отражениями от  $\Gamma_1$ ), затем вновь отражается от (фокусирующей) дуги радиуса  $2R_1$  и далее движется уже как исходное ЛНМ. Мы видим, что целая  $\Phi$ -серия заменена всего на два отражения. В отличие от предыдущего раздела, наши двойники имеют одинаковые геометрические характеристики (кривизну и длину) с исходными ЛНМ и ЛУМ («оригиналами») не во все моменты времени, а только в моменты отражений, по которым строится производное отображение  $T$ , чего, очевидно, будет вполне достаточно для наших целей.

В связи с конструкцией двойников ЛНМ и ЛУМ удобно ввести новое производное отображение  $\hat{T}$ , построенное по всем отражениям этих двойников. Точнее,  $\hat{T}$  — производное отображение бильярдного потока, действующее на множестве  $\hat{M} = M \cup \hat{M}_-$ , где  $\hat{M}_-$  объединяет все точки *самых первых* отражений в  $\Phi$ -сериях (в координатах  $r, \varphi$  множество  $\hat{M}_-$  выглядит как набор параллелограммов, симметричных изображенному на рис. 3). Хотя счетчик числа отражений при этом изменится, но не более чем в два раза: точка  $T^n x$  будет соответствовать  $\hat{T}^{N(n)} x$  для некоторого  $N(n) \in [n, 2n]$ , поэтому нам вполне достаточно доказать теорему 3.6 и лемму 3.7 для отображения  $\hat{T}$ .

Для каждого  $x \in \hat{M}_-$  введем обозначения  $\hat{\tau}(x)$ ,  $\hat{B}^{u,s}(x)$ ,  $\hat{R}(x)$ ,  $\hat{\varphi}^{u,s}(x)$  и  $\hat{\lambda}^{u,s}(x)$ , аналогичные соответствующим обозначениям для  $x \in M$ . Свойства этих величин различны на трех участках фазового пространства  $\hat{M}$ :

1. Если  $x \in M_+$ , то все свойства такие же, как и в случае рассеивающих бильярдов.

2. Если  $x \in \hat{M}_- \setminus M_-$  (первое отражение в  $\Phi$ -серии), то  $\hat{R}(x) = -(R_1 \cos \varphi(x))^{-1} < 0$ ,  $\hat{\tau}(x) = -2(n-1)R_1 \cos \varphi(x) < 0$  (где  $n$  — число отражений в  $\Phi$ -серии) и  $\lambda^u(x) = 1 + \hat{\tau}(x)\hat{B}^u(x) > 1$ .

3. Если  $x \in M_-$  (последнее отражение в  $\Phi$ -серии), то  $\hat{R}(x) = -(R_1 \cos \varphi(x))^{-1} < 0$ ,  $\hat{\tau}(x) = \tau(x) > 0$ , а  $\hat{B}^u(x)$  выражается формулой (П1.15), в которой  $\tau = 2R_1 \cos \varphi$ , т. е.  $\hat{B}^u(x) < 0$ . Согласно условию дефокусировки (§ 2)  $\hat{\tau}(x) = \hat{\tau}_\Phi(x) + \hat{\tau}_P(x)$ , где  $\hat{\tau}_\Phi(x)$  и  $\hat{\tau}_P(x)$  — интервалы движения до точки фокусировки и после нее, причем  $\hat{\tau}_\Phi(x) < \hat{\tau}_P(x)$ . Разность  $\hat{\tau}_\Delta(x) = \hat{\tau}_P(x) - \hat{\tau}_\Phi(x)$  назовем *эффективным интервалом времени* между отражениями в точках  $x \in M$  и  $\hat{T}x$ . Как легко проверить,

$$(П1.16) \quad \hat{\lambda}^u(x) = |1 + \hat{\tau}(x)\hat{B}^u(x)| = 1 + \hat{\tau}_\Delta(x) |\hat{B}^u(x)| > 1.$$

Аналогичные формулы выполнены и для ЛУМ. Мы видим, что выражения для  $\hat{\lambda}^{u,s}(x)$  отличаются от случая рассеивающих бильярдов только появлением модуля в одном из трех случаев. Поэтому все выкладки из п. П1.1 остаются справедливыми и в данной ситуации, только в выражениях для  $\lambda^{u,s}$  и  $B^{u,s}$  появляется знак модуля. Подробнее стоит обсудить лишь два замечания, сделанные перед леммой П1.3, но прежде мы докажем два полезных утверждения.

**Л е м м а П1.7.** *Длины эффективных интервалов времени отделены от нуля:  $\hat{\tau}_\Delta(x) \geq \hat{\tau}_0 > 0$  для всех  $x \in M_-$ .*

Это, по существу, чисто геометрическое утверждение. Для его доказательства предположим, что  $\hat{\tau}_\Delta(x_i) \rightarrow 0$  при некоторых  $x_i \in M_-$ . Если  $\sup |\varphi(x_i)| = \pi/2$ , то некоторая подпоследовательность точек  $x_{i_k}$  сходится к касательной, проведенной к одной из фокусирующих компонент в какой-либо из ее концевых точек. В силу нашего условия Ф2 (§ 2)  $\tau(x_{i_k}) \rightarrow \text{const} > 0$ , а  $\tau_\Phi(x_{i_k}) \rightarrow 0$  получаем противоречие. Если же  $\sup |\varphi(x_i)| < \pi/2$ , то используя компактность  $M_-$ , выделим сходящуюся подпоследовательность  $x_{i_k} \rightarrow x_0$ . Тогда  $|\varphi(x_0)| < \pi/2$  и, кроме того,  $\tau_\Phi(x_0) = \tau_P(x_0)$ . Это возможно только тогда, когда  $x_0$  — периодическая точка, траектория которой отражается только от одной фокусирующей компоненты, что противоречит условию Ф3. Лемма доказана.

**З а м е ч а н и е П1.8.**  $\hat{\tau}(x) \geq \tau_1(Q) > 0$  для всех точек  $x \in M_+$  таких, что  $\hat{T}x \in M_-$  и, кроме того,  $|\hat{\tau}(x)| \geq \tau_2(Q) > 0$  для всех  $x \in \hat{M}_- \setminus M_-$ .

Из утверждений П1.7 и П1.8 вытекает первое замечание, сделанное в п. П1.1 перед леммой П1.3 (о гиперболичности). Для доказательства второго следует вновь представить величину  $B^s(x)$  в виде цепной дроби (2.5) и рассмотреть все три разобранных выше случая. Во втором и третьем случаях необходимая оценка вытекает из дополнительного соотношения  $2B^s(x) \leq |\hat{R}(x)| = 2(R_1 \cos \varphi(x))^{-1}$  при  $x \in M_-$ , которое, в свою очередь, следует из условия дефокусировки (§ 2).

Перейдем к доказательству лемм П1.2—П1.4 для рассматриваемых здесь бильярдов. При  $x, y \in M_+$  и  $\hat{T}x, \hat{T}y \in M_+$  оно переносится из пп. П1.2 — П1.3 без изменений. Если  $x, y \in M_+$ , но  $\hat{T}x, \hat{T}y \in \hat{M}_-$ , то новый элемент появляется лишь в доказательстве леммы П1.2 — требуется оценить разность  $|r(\hat{T}x) - r(\hat{T}y)|$ . Для этого используем неравенство (2.6), в силу которого  $|r(\hat{T}x) - r(\hat{T}y)| \leq \sqrt{p(\hat{T}\gamma_0)}$ , как и в пп. П1.2 — П1.3.

Пусть теперь  $x, y \in M_- \cup \hat{M}_-$ . Тогда в силу (П1.16) и леммы П1.7 неравенство из леммы П1.2 можно записать в более простом виде:

$$(П1.17) \quad |\hat{\tau}(x) - \hat{\tau}(y)| \leq C\alpha_0^n,$$

как, напомним, уже было в п. П1.2.

Если  $x, y \in M_-$  (т. е.  $x$  — последнее отражение в  $\Phi$ -серии), то (П1.17) доказывается с помощью (П1.5) и (2.6). Если же  $x \in \hat{M}_- \setminus M_-$  (т. е.  $x$  — первое отражение в  $\Phi$ -серии), то  $\hat{\tau}(x) = -2n(x)R_1 \cos \varphi(x)$  и  $\hat{\tau}(y) = -2n(y)R_1 \cos \varphi(y)$ , где  $n(x)$  означает число отражений в  $\Phi$ -серии, следующей за точкой  $x$ . Очевидно,  $n(x) = n(y) \leq C/\cos \varphi(x)$ , поэтому (П1.17) следует из (2.7).

Для доказательства лемм П1.3 и П1.4 следует оценить величину  $\hat{R}(x)$ . Она, как и в случае рассеивающих бильярдов, обращается в бесконечность на множестве  $S_0$  (при  $\cos \varphi(x) = 0$ ). Однако в нашем случае нет нужды разбивать окрестность  $S_0$  на полоски однородности, так как она уже разбита нужным образом кривыми разрыва (см. § 2) (эти кривые приблизительно соответствуют отрезкам дробления с показателем  $\nu = 1$ ).

С другой стороны, при  $x \in M_- \cup \hat{M}_-$  приходится доказывать одну дополнительную оценку:

$$(П1.18) \quad |\hat{B}^u(x)| \geq C/\cos \varphi(x)$$

при некотором  $C > 0$ , которая для рассеивающих бильярдов очевидна.

Если  $x \in M_-$  (последнее отражение в  $\Phi$ -серии), то согласно условию дефокусировки  $|\hat{B}^u(x)| \geq (R_1 \cos \varphi(x))^{-1}$ . Если же  $x \in \hat{M}_- \setminus M_-$  (первое отражение в  $\Phi$ -серии), то в силу (П1.15)

$$\hat{B}^u(x) = -\frac{1}{R_1 \cos \varphi(x)} + \frac{1}{\tau(\hat{T}^{-1}x) + (\hat{B}^u(\hat{T}^{-1}x))^{-1}}.$$

Согласно условию дефокусировки,  $\hat{\tau}(\hat{T}^{-1}x) \geq 2R_1 \cos \varphi(x)$  и  $\hat{B}^u(\hat{T}^{-1}x) \geq \tau(\hat{T}^{-1}x)$ , поэтому величина  $|\hat{B}^u(x)|$  может быть близка к нулю, только если  $\hat{T}^{-1}x \in M_-$ , причем  $\hat{\tau}(\hat{T}^{-1}x) \approx 2R_1 \cos \varphi(x)$ , а  $\hat{\tau}_P(\hat{T}^{-1}x) \approx \hat{\tau}_\Phi(\hat{T}^{-1}x)$ . Но этого не может быть в силу нашего условия Ф2 (§ 2), что и доказывает неравенство (П1.18).

Из полученной оценки (П1.18) и (2.7) следует, что

$$\left| \frac{\hat{R}(x) - \hat{R}(y)}{\hat{B}^u(x)} \right| \leq C \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{\cos \varphi(y)} \right| \leq C(p(\gamma_0))^{1/3},$$

что доказывает лемму П1.3. Отсюда же вытекает и лемма П1.4, что завершает анализ бильярдов с фокусирующими компонентами.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Наше доказательство теоремы 3.8 в основном следует схеме построения ЛНМ и ЛУМ — [13].

Для произвольного  $\varepsilon > 0$  и подмножества  $A \subset M$  обозначим  $U_\varepsilon(A)$  окрестность множества  $A$ , образованную всеми 1-возрастающими кривыми длины  $\leq \varepsilon$ , пересекающими  $A$ .

В случае рассеивающих бильярдов с конечным горизонтом число кривых разрыва из  $R_{-1,1}$  конечно, и поэтому  $\nu(U_\varepsilon(R_{-1,1})) \leq \text{const } \varepsilon$ . При появлении особых точек типа бесконечного горизонта и скольжения анализ структуры кривых разрыва в окрестностях этих точек ([8], см. § 2) позволяет получить оценку  $\nu(U_\varepsilon(R_{-1,1})) \leq \text{const } \varepsilon^{4/5}$ .

Несложно показать также, что  $\nu(U_\varepsilon(\mathcal{D})) \leq \text{const } \varepsilon^{2\nu/(1+4\nu)}$ . Действительно, из конструкции отрезков дробления  $\mathcal{D}_0$  легко следует требуемая оценка для  $\nu(U_\varepsilon(\mathcal{D}_0))$ . Чтобы распространить ее на дополнительные кривые дробления  $\mathcal{D}_1$ , рассмотрим произвольную 1-возрастающую кривую  $\gamma$  длины  $\leq \varepsilon$ , пересекающуюся с  $\mathcal{D}_1$ . Тогда при некотором  $|i| \leq m_0$  кривая  $T^i\gamma$  пересекается с  $\mathcal{D}_0$ . В силу леммы П1.5 для точек  $x \in \gamma$  имеем  $B^u(x) \leq \leq \text{const}(Q)$  и поэтому  $p(T^i\gamma) \leq \text{const } \varepsilon$ . Отсюда и вытекает требуемая оценка.

Далее выберем  $p_0 > 0$ , положим  $\varepsilon_n = p_0 \Lambda_0^{-[n/m_0]}$  при всех  $n \geq 0$  и заметим, что

$$(П2.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \nu(U_{\varepsilon_n}(R_{-1,1} \cup \mathcal{D})) \leq \text{const}(Q) p_0^d$$

где  $d = \min\{4/5, 2\nu/(1+4\nu)\}$ .

Из стандартных рассуждений [13, 29] вытекает, что если  $T^n x \notin U_{\varepsilon_n}(R_{-1,1} \cup \mathcal{D})$  при всех целых  $n \geq 0$ , то существует ОЛНМ  $\gamma^{ou}(x)$ , и расстояния от его концов до точки  $x$  не меньше  $p_0$ . В силу (П2.1) мера множества таких точек при фиксированном  $p_0$  не меньше  $1 - \text{const}(Q) p_0^d$ . Тем самым теоремы 3.8 и 3.10 установлены.

Для доказательства предложения 3.11 рассмотрим такую точку  $x$ , что на ЛНМ  $\gamma^u(x)$  точки дробления (т. е. точки пересечений  $T^n \mathcal{D} \cap \gamma^u(x)$  при всех  $n \geq 0$ ) имеют предельную точку где-то внутри кривой  $\gamma^u(x)$ . Тогда для бесконечного множества значений  $n \geq 0$  выполнено включение  $T^{-n}x \in U_{\varepsilon_n}(\mathcal{D})$ , где  $\varepsilon_n = p(\gamma^u(x)) \Lambda_0^{-[n/m_0]}$ . В силу (П2.1) и леммы Бореля — Кантелли такие точки  $x$  образуют множество нулевой меры.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Напомним вначале доказанный в [24] аналог теоремы 3.12, который мы приведем здесь в слегка усиленном варианте:

**Т е о р е м а ПЗ.1.** *Предположим, что рассеивающий бильярд удовлетворяет условиям А, Б, В (§ 2) и имеет конечный горизонт ( $\tau(x) \leq \text{const} < < \infty$ ). Пусть  $\gamma^u$  — произвольное ЛНМ и  $D > 0$ . Для каждого  $N \geq 0$  выделим в  $\gamma^u$  подотрезки  $\gamma_{N,i}^u$ , являющиеся компонентами гладкости отображения  $T^N$  на  $\gamma^u$  и такие, что при всех  $n \in [0, N]$  образ  $T^n \gamma_{N,i}^u$  лежит в компоненте гладкости множества  $T^n \gamma^u$ , имеющей длину не более  $D$ . Тогда найдутся  $D > 0$  и  $C > 0$ ,  $0 < \lambda < 1$  такие, что для любого  $N \geq 1$*

$$p(\bigcup_i \gamma_{N,i}^u) \leq C \lambda^N.$$

Иными словами, суммарная мера точек на ЛНМ  $\gamma^u$ , образы которых «в будущем» за первые  $N$  шагов ни разу не попали в достаточно длинные ЛНМ (т. е. в ЛНМ длины  $> D$ ), убывает экспоненциально по  $N$ .

Для доказательства запишем очевидную оценку:

$$(ПЗ.1) \quad p(\bigcup_i \gamma_{N,i}^u) \leq D \sum_i \Lambda_N^{-1}(i),$$

где  $\Lambda_N(i)$  — некоторая оценка (снизу) для коэффициента растяжения ЛНМ  $\gamma_{N,i}^u$  под действием  $T^N$ .

В силу гиперболичности отображения  $T$  (§ 2) можно положить  $\Lambda_N(i) = = \Lambda_0^{[N/m_0]}$ . Остается оценить число отрезков  $\gamma_{N,i}^u$  при заданном  $N$ . Пусть  $m \geq 1$  — некоторое целое число. Из условия Б (§ 2) следует, что если  $D$

достаточно мало ( $D \leq D_0(m)$ ), то любое ЛНМ длины  $\leq D$  пересекает не более  $K_0 m$  кривых разрыва из  $R_{-m,0}$ . Поэтому число отрезков  $\gamma_{N,i}^u$  не превышает  $(K_0 m)^{[N/m]+1}$ .

Полученные оценки вместе с (ПЗ.1) дают

$$p(\cup_i \gamma_{N,i}^u) \leq D \Lambda_0^{-[N/m_0]} (K_0 m)^{[N/m]+1}.$$

Подберем такое  $m$ , чтобы величина  $\Lambda_1 = \Lambda_0 (K_0 m)^{-m_0/m}$  была строго больше 1. Тогда

$$p(\cup_i \gamma_{N,i}^u) \leq \text{const } D \Lambda_1^{-[N/m_0]},$$

и теорема ПЗ.1 доказана.

Возвращаемся к нашей теореме 3.12. Обозначим, по аналогии с теоремой ПЗ.1, через  $\gamma_{N,i}^u$  все подотрезки в  $\gamma^u$ , образы которых под действием  $T^n$  при всех  $0 \leq n \leq N$  переходят в однородные компоненты множества  $T^n \gamma^u$ , имеющие длину не более  $D$ . Тогда оценка (ПЗ.1) сохраняет свою силу.

Однако в нашем случае число отрезков  $\gamma_{N,i}^u$  может быть бесконечно, причем сразу по нескольким различным причинам: дробления в окрестности  $S_0$  и скопление бесконечного числа кривых разрыва в окрестности особых точек — типа бесконечного горизонта (п. 2.3) и типа скольжения (п. 2.5). С другой стороны, в указанных выше местах фазового пространства коэффициент растяжения ЛНМ растет до бесконечности. Это позволяет получить более аккуратную оценку  $\Lambda_N(i)$  и таким образом компенсировать рост числа отрезков  $\gamma_{N,i}^u$ .

Рассмотрим подробнее оба возможных источника неограниченного роста числа компонент  $\gamma_{N,i}^u$ .

**1-й с л у ч а й** (дробление). Пронумеруем все полоски однородности (см. Приложение 1) так, чтобы  $n$ -я полоска задавалась соотношением  $\pi/2 - n^{-\nu} \leq |\varphi| \leq \pi/2 - (n+1)^{-\nu}$  ( $n \geq n_0$ ). Пока будем рассматривать только полоски с номерами  $\geq n_1$ , где  $n_1$  — достаточно большое число, которое мы выберем ниже. Остальные отрезки дробления (с номерами от  $n_0$  до  $n_1$ ) мы учтем далее наряду с обычными кривыми разрыва. Пусть произвольное ЛНМ  $\gamma^u$  лежит в  $n$ -й полоске однородности. Тогда из соотношений, приведенных в пп. П1.2 — П1.3, легко вывести, что коэффициент растяжения этого ЛНМ под действием  $T^i$  при некотором  $i \leq m_0$  не меньше  $\text{const } n^\nu$ , причем промежуточные образы  $T\gamma^u, \dots, T^{i-1}\gamma^u$  не могут попасть еще раз в полоску однородности, что вытекает из леммы П1.5.

**2-й с л у ч а й** (разрывы в окрестностях особых точек). Структура кривых разрыва отображения  $T$  в окрестностях особых точек была описана в § 2. Они разбивают эту окрестность на счетное число ячеек, которые мы пронумеруем естественным образом, т. е. в порядке приближения к особой точке. Опять же, будем рассматривать здесь только ячейки с номерами  $\geq n_1$ , а кривые разрыва, ограничивающие остальные ячейки, учтем ниже. Пусть произвольное ЛНМ находится в  $n$ -й ячейке. Тогда (§ 2) коэффициент растяжения этого ЛНМ под действием  $T$  не меньше  $\text{const } n^d$ , где  $d = 2$  для ЛНМ в окрестностях особых точек типа скольжения, а для ЛНМ в окрестностях особых точек типа бесконечного горизонта величина  $d$  принимает два значения:  $d = 3/2$  для подтипов  $S$  и  $SV$ , и  $d = 1$  для подтипа  $V$  и для стадиона (п. 2.6). Рассмотрим вначале более простые случаи, когда  $d = 2$  и  $d = 3/2$ .

Проделанный анализ позволяет получить необходимые оценки  $\Lambda_N(i)$ . Предположим, что образы ЛНМ  $\gamma_{N,i}^u$  за первые  $N$  итераций  $k_1$  раз попали

в полоски дробления (с номерами  $\geq n_1$ ), и  $k_2$  раз — в ячейки (также с номерами  $\geq n_1$ ) в окрестностях особых точек. Номера соответствующих полосок обозначим  $j'_1, \dots, j'_{k_1}$ , а ячеек —  $j''_1, \dots, j''_{k_2}$ . Тогда справедлива следующая оценка:

$$\Lambda_N(i) = \Lambda_0^{\left[\frac{N-k_1-k_2}{m_0}\right]} \cdot \left(\prod_{l=1}^{k_1} j'_l{}^v\right) \cdot \left(\prod_{l=1}^{k_2} j''_l{}^{3/2}\right).$$

Оценим теперь влияние не учтенных выше кривых разрыва и отрезков дробления на число компонент  $\gamma_{N,i}^u$ . Пусть произвольное ЛНМ длины  $D$  и его образы в будущем за первые  $m$  шагов не пересекают полосок дробления с номерами  $\geq n_1$  и ячеек с такими же номерами, находящихся в окрестностях особых точек. Тогда, как следует из условия Б и конструкции отрезков дробления, найдется такая постоянная  $K_1 > 0$ , что указанные образы данного ЛНМ пересекут не более  $K_1 m$  кривых разрыва и отрезков дробления, если только длина  $D$  исходного ЛНМ достаточно мала ( $D \leq D_0(m, n_1)$ ). Здесь постоянная  $K_1$  больше, чем  $K_0$  из условия Б, из-за влияния отрезков дробления.

Таким образом, неравенство (ПЗ.1) при достаточно малых  $D$  ( $D \leq D_0(m, n_1)$ ) можно записать в следующем виде:

$$(ПЗ.2) \quad p\left(\bigcup_i \gamma_{N,i}^u\right) \leq \sum_{k_1, k_2=0}^N D \cdot \left(\sum_{n=n_1}^{\infty} n^{-v}\right)^{k_1} \times \\ \times \left(\sum_{n=n_1}^{\infty} n^{-3/2}\right)^{k_2} \cdot \Lambda_0^{-\left[\frac{N-k_1-k_2}{m_0}\right]} \cdot (K_1 m)^{[N/m]+1}.$$

В написанной оценке существенно, чтобы ряд  $\sum n^{-v}$  сходиллся, поэтому мы накладываем ограничение  $v > 1$ . Это единственное место в работе, где такое ограничение понадобилось.

Остается подобрать для данного  $v > 1$  столь большое  $n_1$ , что  $n_1^{-v} + (n_1 + 1)^{-v} + \dots \leq \Lambda_0^{-1/m_0}$ , и тогда получим оценку

$$(ПЗ.3) \quad p\left(\bigcup_i \gamma_{N,i}^u\right) \leq DN^2 \Lambda_0^{-[N/m_0]} (K_1 m)^{[N/m]+1}.$$

Отсюда теорема 3.12 выводится без труда.

Нам осталось рассмотреть особые точки подтипа  $V$  и случай стадиона (т. е., когда  $d = 1$ , см. выше). В окрестностях этих точек коэффициент растяжения ЛНМ, лежащего в  $n$ -й ячейке, равен  $\approx C_1 n$  ( $C_1 = \text{const}$ ). Однако одно ЛНМ пересекает лишь конечное число ячеек с номерами от  $N$  до  $C_2 N$  (см. замечание 2.2 и лемму 2.3). Поэтому такое ЛНМ даст вклад в формулу (ПЗ.2), равный

$$(ПЗ.4) \quad \sum_{n=N}^{C_2 N} \frac{1}{C_1 n} \approx \frac{1}{C_1} \ln C_2 = \text{const}.$$

Кроме того, ячейки из окрестности особых точек подтипа  $V$  «блуждают» (замечание 2.2) и поэтому общий их вклад в формулу (ПЗ.3) не превышает  $(C_1^{-1} \ln C_2)^{N\varepsilon}$  для некоторого малого  $\varepsilon > 0$  (точнее,  $\varepsilon = \varepsilon(n_1)$  будет сколь угодно мало при достаточно большом  $n_1$ ). Эта добавка не окажет существенного влияния на оценку (ПЗ.3).

Наконец, в случае стадиона рассматриваемые ячейки уже не будут «блуждающими», но нас «выручают» точные значения постоянных  $C_1 = 4$  и  $C_2 = 9$  в формуле (ПЗ.4) (см. лемму 2.3). Поскольку  $4^{-1} \ln 9 < 1$ , общая оценка остается справедливой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А н о с о в Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1967.— Т. 90.— 210 с.
- [2] А н о с о в Д. В., С и н а й Я. Г. Некоторые гладкие эргодические системы // УМН.— 1967.— Т. 22, вып. 5.— С. 107—172.
- [3] Б е р н ш т е й н С. Н. Собрание сочинений. Т. 4.— М.: Изд-во АН СССР, 1964.
- [4] Б о у э н Р. Методы символической динамики: Сб. статей.— М.: Мир, 1979.
- [5] Б у н и м о в и ч Л. А., С и н а й Я. Г. Об основной теореме теории рассеивающих бильярдов // Мат. сб.— 1973.— Т. 90, № 3.— С. 415—431.
- [6] Б у н и м о в и ч Л. А. О бильярдах, близких к рассеивающим // Мат. сб.— 1974.— Т. 95, № 1.— С. 49—73.
- [7] Б у н и м о в и ч Л. А. Об убывании корреляций в динамических системах с хаотическим поведением // ЖЭТФ.— 1985.— Т. 89, вып. 4.— С. 1452—1470.
- [8] Б у н и м о в и ч Л. А., С и н а й Я. Г., Ч е р н о в Н. И. Марковские разбиения для двумерных гиперболических бильярдов // УМН.— 1990.— Т. 45, вып. 3.— С. 97—134.
- [9] И б р а г и м о в И. А., Л и н н и к Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М.: Наука, 1965.
- [10] К о р н ф е л ь д И. П., С и н а й Я. Г., Ф о м и н С. В. Эргодическая теория.— М.: Наука, 1980.
- [11] Л и в ш и ц А. Н. Некоторые свойства гомологии  $\mathcal{U}$ -систем // Мат. заметки.— 1971.— Т. 10, № 5.— С. 555—564.
- [12] С и н а й Я. Г. Марковские разбиения и  $\mathcal{U}$ -дiffeоморфизмы // Функц. анализ и его прил.— 1968.— Т. 2, вып. 1.— С. 64—89.
- [13] С и н а й Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // УМН.— 1970.— Т. 25, вып. 2.— С. 144—192.
- [14] С и н а й Я. Г. Гиббсовские меры в эргодической теории // УМН.— 1972.— Т. 27, вып. 4.— С. 21—64.
- [15] С и н а й Я. Г., Ч е р н о в Н. И. Эргодические свойства некоторых систем двумерных дисков и трехмерных шаров // УМН.— 1987.— Т. 42, вып. 3.— С. 153—174.
- [16] Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— Т. 2.— М.: Изд-во ВИНТИ.— 1985.
- [17] Ч е р н о в Н. И. Топологическая энтропия и периодические точки двумерных гиперболических бильярдов // Функц. анализ и его прил.— 1991.— Т. 25, вып. 1.— С. 50—57.
- [18] B o u c h a u d J.-P., L e D o u s s a l P. Numerical study of a  $d$ -dimensional periodic Lorentz gas with universal properties // J. Statist. Phys.— 1985.— V. 41, N 1—2.— P. 225—248.
- [19] B o w e n R. Equilibrium states and ergodic theory of Anosov diffeomorphisms.— Lect. Notes Math.— V. 470.— Berlin: Springer-Verlag, 1975.
- [20] B o w e n R., R u e l l e D. The ergodic theory of Axiom A flows // Invent. Math.— 1975.— V. 29.— P. 181—202.
- [21] B u n i m o v i c h L. A. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // Comm. Math. Phys.— 1979.— V. 65, № 3.— P. 295—312.
- [22] B u n i m o v i c h L. A., S i n a i Ya. G. Markov partitions for dispersed billiards // Comm. Math. Phys.— 1980.— V. 73, № 2.— P. 247—280.
- [23] B u n i m o v i c h L. A., S i n a i Ya. G. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers // Comm. Math. Phys.— 1981.— V. 78, № 4.— P. 479—497.
- [24] B u n i m o v i c h L. A., S i n a i Ya. G. Markov partitions for dispersed billiards (Erratum) // Comm. Math. Phys.— 1986.— V. 107, № 2.— P. 357—358.

- [25] Bunimovich L. A. A theorem on ergodicity of two-dimensional hyperbolic billiards // *Comm. Math. Phys.*— 1990.— V. 130, № 4.— P. 599—621.
- [26] Casati G., Comparin G., Guarneri I. Decay of correlations in certain hyperbolic systems // *Phys. Rev. A.*— 1982.— V. 26, № 1.— P. 717—719.
- [27] Gallavotti G., Ornstein D. Billiards and Bernoulli schemes // *Comm. Math. Phys.*— 1974.— V. 38, № 2.— P. 83—101.
- [28] Guivarc'h Y., Hardy J. Théorèmes limites pour une classe de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov // *Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. Statist.*— 1988.— V. 24, № 1.— P. 73—98.
- [29] Katok A., Strelcyn J. M. Smooth Maps with Singularities: invariant manifolds, entropy and billiards.— *Lect. Notes Math.*— V. 1222.— Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [30] Kràmli A., Szàsz D. The problem of recurrence for Lorentz processes // *Comm. Math. Phys.*— 1985.— V. 98, № 4.— P. 539—552.
- [31] Kràmli A., Simányi N., Szàsz D. A «transversal» fundamental theorem for semi-dispersing billiards // *Comm. Math. Phys.*— 1990.— V. 129, № 3.— P. 535—560.
- [32] Machta J. Power law decay of correlations in a billiard problem // *J. Statist. Phys.*— 1983.— V. 32, № 3.— P. 555—564.
- [33] Ruelle D. *Thermodynamic formalism.*— New York: Addison-Wesley, 1978.
- [34] Sinai Ya. G. Hyperbolic billiards.— *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1990, Kyoto, Japan.*
- [35] Smale D. Differentiable dynamical systems // *Bull. Amer. Math. Soc.*— 1967.— V. 73.— P. 747—817.
- [36] Vivaldi F., Casati G., Guarneri I. Origin of long-time tails in strongly chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.*— 1983.— V. 51, № 9.— P. 727—730.

Институт океанологии  
им. П. П. Ширшова АН СССР  
Институт теоретической физики  
им. Л. Д. Ландау АН СССР  
Объединенный институт ядерных исследований

Поступила в редакцию  
25 апреля 1991 г.